

EXPLIZITE AUFLÖSUNG VON EBENEN KURVENSINGULARITÄTEN  
IN BELIEBIGER CHARAKTERISTIK

von Herwig HAUSER und Georg REGENSBURGER \*)

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung . . . . .	306
2	Beispiele . . . . .	314
3	Das Newton-Polygon . . . . .	317
4	Koordinatenwechsel . . . . .	321
5	Die maximale Steigung . . . . .	327
6	Die Auflösungsinvariante . . . . .	329
7	Aufgelöste Punkte . . . . .	331
8	Explosion eines Punktes . . . . .	334
9	Total und Strikt Transformierte . . . . .	336
10	Die Invariante fällt unter Explosion . . . . .	338
11	Beweis des Hauptsatzes . . . . .	344
A	Appendix . . . . .	345
	A.1 Potenzreihenringe . . . . .	345
	A.2 Gauß-Bruhat Zerlegung . . . . .	348

---

\*) Die Vorbereitung dieses Artikels wurde zum Teil im Rahmen des Projektes P-15551 des Österreichischen Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF) durchgeführt. Die Bilder wurden von Sebastian Gann mit dem Programm POV-Ray erstellt. Die Autoren bedanken sich bei Thierry Vust für die sorgfältige Durchsicht früherer Versionen der Arbeit und zahlreiche Verbesserungsvorschläge.

## 1. EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Konstruktion einer Auflösung von ebenen Kurvensingularitäten in beliebiger Charakteristik. Die Darstellung ist vollständig und detailliert – sie setzt nur die elementaren Grundkenntnisse der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra voraus. Prägnant formuliert lautet die zu beweisende Aussage wie folgt.

*SATZ. Jede singuläre ebene algebraische Kurve ist der Schatten einer glatten algebraischen Kurve unter einer geeigneten Projektion.*



ABBILDUNG 1

Die Schleife als Schatten einer glatten Kurve

Die Aussage des Satzes gilt auch für singuläre Kurven in höher dimensionalen Mannigfaltigkeiten, also solche, die nicht notwendig in eine zwei-dimensionale Fläche eingebettet sind. Wir werden uns indessen auf ebene Kurven beschränken. Der Beweis des allgemeinen Falles mit der in dieser Arbeit besprochenen Methode würde größeren technischen Aufwand erfordern.

Seit Mitte des neunzehnten Jahrhunderts ist die Auflösung der Singularitäten algebraischer Varietäten ein zentrales Thema der algebraischen Geometrie. Kronecker, Max Noether, Dedekind, Riemann, Weber, Picard, Jung, ... sowie die Geometer der italienischen Schule – Enriques, Chisini, Bertini, Del Pezzo, Levi, ... – beweisen wiederholt und mit ähnlichen Methoden die

Existenz von Auflösungen ebener algebraischer Kurven über  $\mathbb{C}$ . Siehe [Za, Sg, Ab1, Lp, Ha1] für Details über die historische Entwicklung. Die Arbeiten lassen vielfach die heutzutage selbstverständliche Präzision der Begriffe und Argumente vermissen. Grundlegendes Hilfsmittel war (und ist auch heute noch) die Explosion (Aufblasung) des umgebenden Raumes (der Ebene oder einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit) durch den lokalen Übergang zum Möbiusband ("Wendeltreppe"). Durch Kontraktion des Nullschnittes des Möbiusbandes auf einen Punkt erhält man eine Projektionsabbildung auf die Ebene, siehe Abbildung 2.

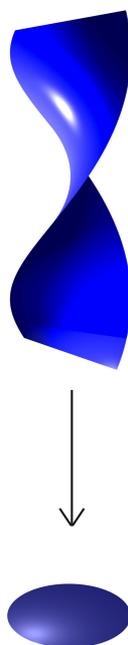


ABBILDUNG 2

Explosion eines Punktes in der Ebene

Das Hochziehen der gegebenen Kurve (wobei der singuläre Punkt gerade die Projektion des Nullschnittes sein soll) von der Ebene auf das Möbiusband soll die Singularität der Kurve entflechten. Geometrisch ist das einsichtig für gewöhnliche Doppelpunkte, d.h., transversale Selbstschnitte der Kurve, deren Zweige durch das Hochziehen getrennt werden, siehe Abbildung 3.

Bei Spitzen benötigt man bereits eine algebraische Überlegung, um zu

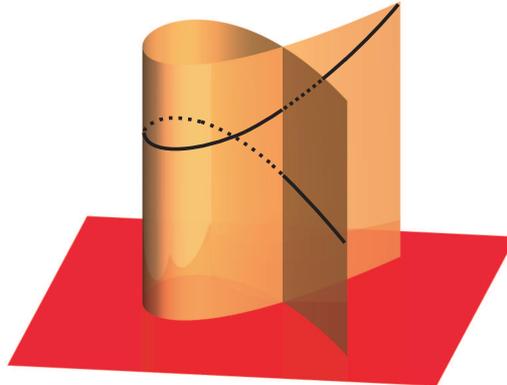


ABBILDUNG 3  
Hochziehen der Schleife

sehen, daß das Urbild der Kurve “weniger singulär” als die Ausgangssingularität ist. Für die einfachste Spitze mit Gleichung  $x^3 = y^2$  erhält man in einem Transformations-Schritt eine glatte Kurve, siehe Abbildung 4. Bei komplizierteren Kurven sind mehrere Iterationen dieses Prozesses notwendig. Der Satz über die Existenz von Auflösungen von ebenen Kurven besagt, daß immer *endlich viele* Transformationen genügen, um auf diese Weise eine glatte Kurve zu erhalten.

Oben beschriebene Transformation der Ebene zum Möbiusband und das Hochziehen der eingebetteten Kurve nennt man die “Explosion des Nullpunktes in der Ebene” und den Übergang von der Kurve zu ihrer “strikt Transformierten”. Diese Transformation war den algebraischen Geometern des neunzehnten Jahrhunderts geläufig. Sie ist heutzutage auch unter den Namen “Punktaufblasung”, “quadratische Transformation”, “Hopf-Abbildung” oder “sigma-Prozess” bekannt. Dulac verwendet sie zur Vereinfachung und Klassifikation von (singulären) Differentialgleichungen [Du].

Mit Zariski findet um 1940 in der Auflösungsproblematik eine starke und sehr erfolgreiche Algebraisierung statt. Von nun an werden algebraische Varietäten über beliebigen Körpern oder über dem Ring der ganzen Zahlen betrachtet. Zariski erkennt bereits, daß der Fall positiver Charakteristik wesentlich vertrackter ist, ebenso wie die arithmetische Situation. Schon zu Zeiten Zariski’s war der Fall von Kurven in positiver Charakteristik als gelöst betrachtet worden. Sein Schüler Abhyankar beweist in einer spektakulären und technisch anspruchsvollen Arbeit Mitte der fünfziger Jahre die Existenz von

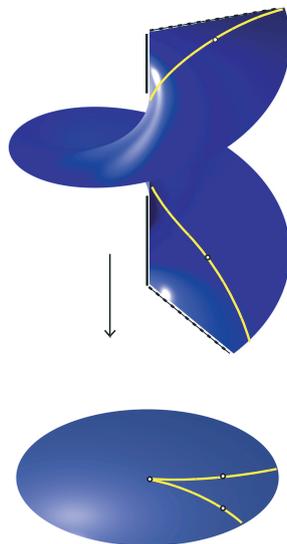


ABBILDUNG 4  
Auflösung der Spitze

Auflösungen für Flächen in Charakteristik  $p > 0$  [Ab3].

Die in der Literatur vorliegenden Beweise der Kurvenaflösung lassen sich im wesentlichen in zwei Typen einteilen.

- (1) Auflösung durch Normalisierung: Der Koordinatenring  $R$  der (nicht notwendig ebenen) irreduziblen Kurve  $C$  wird in seinen Funktionenkörper  $K$  eingebettet. Man zeigt, daß der ganze Abschluss  $\tilde{R}$  von  $R$  in  $K$  wieder der Koordinatenring einer Kurve  $\tilde{C}$  ist. Diese Kurve  $\tilde{C}$ , die Normalisierung von  $C$ , erweist sich als glatte Kurve. Die Inklusion  $R \subset \tilde{R}$  induziert die gewünschte Projektionsabbildung  $\tilde{C} \rightarrow C$ . Literatur: Zariski-Samuel [ZS, vol. II, p. 93], Mumford [Mu, III.8], Shafarevic [Sh, II.5].

*Vorteil:* Man erhält die Auflösung in einem Schritt. Charakteristikunabhängig. War es ursprünglich mühsam, die Normalisierung zu berechnen, so gibt es heute dafür in Computeralgebra-Systeme integrierte Algorithmen.

*Nachteil:* Man verliert die Einbettung der Kurve. Die gleiche Methode via Normalisierung funktioniert für Flächen nur unter Hinzunahme von Explosionen von Punkten, und versagt vollkommen in Dimension  $\geq 3$  [BL].

- (2) Auflösung durch Folge von Punktexplosionen des umgebenden Raumes: Hier besteht das zentrale Problem darin, zu zeigen, daß man in endlich

vielen Schritten eine glatte Kurve erhält. Dazu kann man drei verschiedene Argumente verwenden.

- (2a) Verwendung der Normalisierung: Die Normalisierung der Kurve faktorisiert über jede Explosion der Kurve, und da die Ringerweiterung  $R \subset \tilde{R}$  endlich ist, muss die Folge der Explosionen stationär werden. Das bedeutet, daß die in hinreichend vielen Schritten erhaltene Kurve glatt ist. Literatur: Campillo [Cp, Thm. 1.5.10].

*Vorteil:* Sehr elegantes und schnelles Argument. Funktioniert auch für Raumkurven. Charakteristikunabhängig.

*Nachteil:* Argument versagt in höherer Dimension. Keine Aussage über die mindestens notwendige Anzahl von Explosionen.

- (2b) Induktion über das arithmetische Geschlecht: Für ebene (projektive) Kurven wird das arithmetische Geschlecht definiert als

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \frac{1}{2} \sum_p r_p(r_p - 1),$$

wobei  $d$  der Grad der Kurve ist, die Summe über alle singulären Punkte  $p$  der Kurve läuft, und  $r_p$  die Multiplizität der Kurve in  $p$  bezeichnet. Das Geschlecht fällt unter Explosion in einem singulären Punkt der Kurve. Da das Geschlecht nicht negativ werden kann, muss nach endlich vielen Schritten die Kurve glatt geworden sein. Die Argumentation geht auf Bertini zurück. Literatur: Fulton [Fu, chap. 7], Hartshorne [Hs, Thm. 3.9, chap. V].

*Vorteil:* Induktionsinvariante kann direkt definiert werden. Charakteristikunabhängig.

*Nachteil:* Funktioniert nicht für Raumkurven. Verwendet wesentlich die Theorie der Flächen. Argument versagt in höherer Dimension.

- (2c) Induktion über Ordnung und Steigung des Newton-Polygons: Jedem singulären Punkt der Kurve wird ein Paar von Zahlen zugeordnet. Die erste Komponente ist die Ordnung der Taylorentwicklung des definierenden Polynoms im Punkt (Multiplizität), die zweite die Steigung eines genau spezifizierten Segments des Newton-Polygons des Polynoms. Das Paar wird bezüglich der lexikographischen Ordnung betrachtet. Es fällt unter jeder Explosion, solange der Punkt singulär ist. Da die lexikographische Ordnung eine Wohlordnung ist, sind nach endlich vielen Explosionen alle Punkte regulär. Literatur: Brieskorn-Knörrer [BK] in Charakteristik Null, Abhyankar [Ab2] und Orbanz [Or] in beliebiger Charakteristik.

*Vorteil:* Sehr explizit und elementar. Charakteristikunabhängig. Funktioniert mit entsprechenden Erweiterungen auch in höherer Dimension, allerdings bis jetzt nur in Charakteristik Null. Beinhaltet bereits die zentrale Idee, eine Induktion über die Dimension des umgebenden Raumes zu verwenden.

*Nachteil:* Etwas rechnerisch. Keine tiefere Einsicht in die Geometrie der Singularitäten. Funktioniert in beliebiger Charakteristik nicht direkt für Raumkurven.

Es gibt weitere Beweise für die Kurvenauflösung, siehe etwa Casas [Cs, sec. 3.7] für eine etwas andere Induktionsinvariante in Charakteristik 0, oder Oka [Ok] und Goldin-Teissier [GT] für einen Zugang über torische Modifikationen.

Die vorliegende Arbeit beweist die Auflösung von ebenen Kurvensingularitäten durch Induktion über das Paar (Ordnung, Steigung) wie in (2c). Eine ähnlich explizite Darstellung, allerdings beschränkt auf den Fall der Charakteristik Null, findet sich im Buch von Brieskorn-Knörrer, das sich gut als begleitende Lektüre zu diesem Artikel eignet. Die Darstellung von Abhyankar in [Ab2] ist sehr suggestiv, wenn auch im Detail nicht ganz leicht nachzuvollziehen. Wir empfehlen auch den Artikel von Orbanz [Or] als Ergänzung und Abrundung.

Hier ist eine präzise Version des Satzes, mit dessen Beweis wir uns beschäftigen wollen.

**SATZ.** Sei  $C \subset M$  eine algebraische Kurve, die in eine zwei-dimensionale glatte algebraische Varietät  $M$  eingebettet ist, wobei  $M$  und  $C$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik definiert seien. Zu jedem Punkt  $a$  von  $C$  lässt sich in natürlicher Weise ein Paar von Zahlen  $(r, s) \in \mathbb{N}^2$  konstruieren, das für singuläre  $a$  unter der Punktexplosion von  $M$  in  $a$  in jedem Punkt  $a'$  der strikt Transformierten  $C'$  von  $C$  bezüglich der lexikographischen Ordnung auf  $\mathbb{N}^2$  fällt,

$$(r', s') <_{\text{lex}} (r, s),$$

wobei  $(r', s')$  das dem Punkt  $a'$  zugeordnete Paar bezeichnet. Dabei hängt  $(r, s)$  nur von der Isomorphieklasse der Vervollständigung des lokalen Ringes von  $C$  in  $a$  ab.

Die Iteration von Explosionen in den singulären Punkten von  $C$  und ihren strikt Transformierten liefert also nach endlich vielen Schritten eine glatte Kurve.

Als erstes müssen natürlich die verwendeten Begriffe definiert und erläutert werden. Als Erleichterung für den Leser schicken wir dem Text einige Beispiele voraus. Im Hauptteil entwickeln wir die wesentlichen Ideen und Konzepte, im Anhang werden die notwendigen Definitionen und Hilfsmittel aus der kommutativen Algebra bereitgestellt.

Die Auflösung von Kurvensingularitäten ist ein wichtiges Resultat der algebraischen Geometrie. Die Beweistechnik beruht, ausgehend von geometrischen Überlegungen, auf Begriffen und Sätzen der kommutativen Algebra, die jeder Studierende einmal *in realiter* angewandt gesehen haben sollte. Die verwendete Induktion über ein lexikographisch geordnetes Paar von Invarianten ist ein Musterbeispiel für elegante und ökonomische Beweisführung. Schlussendlich ist der Kurvenfall als Vorläufer des Falles beliebiger Dimension eine ausgezeichnete Vorbereitung, um Hironaka's Beweis der Auflösung von beliebigen Varietäten in Charakteristik Null zu verstehen. Siehe dazu die Originalarbeit von Hironaka [Hi] und die nachfolgenden Weiterentwicklungen, bzw. Vereinfachungen seines Beweises durch Aroca, Vicente, Villamayor, Encinas, Bierstone-Milman und Hauser [AHV1, AHV2, Vi1, Vi2, EV, BM, EH, Ha2].

Gleichzeitig ist ein tiefes Verständnis des Kurvenfalls in positiver Charakteristik die Voraussetzung dafür, das bislang noch immer ungelöste Problems der Auflösung algebraischer Varietäten beliebiger Dimension in positiver Charakteristik  $p > 0$  anzugehen. Siehe [Ha3] für die Auflösung von Flächen in beliebiger Charakteristik und [Ha4, Ha5] für eine Beschreibung der auftretenden Probleme in Dimension  $\geq 3$ .

Wir beschreiben nun kurz das in dieser Arbeit verfolgte und klassisch vielfach verwendete Beweisschema. Eine Kurve hat nur endlich viele Singularitäten, also genügt es, jede einzeln zu betrachten und aufzulösen. Wir können uns hiermit auf lokale Überlegungen beschränken. Unter Explosion geht ein singulärer Punkt der Kurve in höchstens endlich viele singuläre Punkte der transformierten Kurve über. Wieder genügt es, einen herauszugreifen. Damit erhalten wir einen Homomorphismus der zugehörigen lokalen Koordinatenringe als hauptsächliches Objekt unserer Untersuchungen.

Unsere Kurve ist nach Voraussetzung in eine glatte zweidimensionale algebraische Varietät  $M$  eingebettet. Diese Fläche  $M$  erlaubt im allgemeinen keine Überdeckung durch offene Teilmengen, die isomorph zu offenen Teilmengen des affinen Raumes  $\mathbf{A}^2$  sind. Damit können wir bei den lokalen Untersuchungen der Kurve a priori nicht voraussetzen, daß die Kurve in den  $\mathbf{A}^2$  eingebettet ist, also dort durch eine polynomiale Gleichung in zwei Variablen definiert ist.

Ein wesentliche Vereinfachung stellt nun der Übergang zu den Vervoll-

ständigungen der lokalen Ringe dar. Damit können wir im Ring der formalen Potenzreihen arbeiten. Dies erleichtert die Konstruktion der Invarianten. Die Vervollständigung des lokalen Koordinatenringes der Kurve ist ein Faktoring des formalen Potenzreihenrings in zwei Variablen nach einem Hauptideal. Dieses wird von einer formalen Potenzreihe erzeugt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden wir stets annehmen, daß dieses Ideal durch ein Polynom erzeugt wird, daß also die Kurve lokal in den  $\mathbf{A}^2$  eingebettet ist. Im allgemeinen Fall sind die durchzuführenden Konstruktionen sehr ähnlich, unsere Annahme stellt also keine wesentliche Einschränkung dar.

Jedem solchen Faktoring wollen wir ein Paar von Zahlen zuordnen, und zwar so, daß das Paar unter Explosion lexikographisch fällt. Dazu ist es natürlich notwendig, das Paar intrinsisch zu wählen, d.h., unabhängig von der Wahl von Koordinaten oder anderen Hilfsmitteln.

Die erste Komponente des Paares wird die Ordnung der Taylorentwicklung der die Kurve definierenden Gleichung im singulären Punkt sein. Klarerweise ist sie intrinsisch. Die zweite Komponente wird durch die Wahl von lokalen Koordinaten und die Betrachtung des Newton-Polygons der Kurve eingeführt. Sie wird definiert als ein (geeignetes) Vielfaches der Steigung eines ausgezeichneten Segments des Newton-Polygons. Um diese Steigung koordinatenunabhängig zu machen, wird ihr Supremum über alle Koordinaten als Invariante genommen. Man erhält ein Paar von Zahlen  $(r, s)$  in  $\mathbf{N}^2$  (bis auf Multiplikation mit einer fixen positiven Zahl, die etwaige Nenner bereinigt). Dieses Paar heißt die lokale Auflösungsinvariante der Kurve im betrachteten Punkt.

Dem Verhalten dieses Paares unter Explosion gilt nun unser Hauptaugenmerk. Es ist leicht zu zeigen, daß die erste Komponente, die Ordnung, unter Explosion nicht steigen kann, wenn man von der Kurve zu ihrer strikt transformierten übergeht. Damit kann man sich, per Induktion über die Ordnung, im weiteren auf jene Punkte der strikt transformierten beschränken, wo diese Ordnung gleich bleibt (ist sie gefallen, ist auch das Paar  $(r, s)$  lexikographisch gefallen). Die Konstanz der Ordnung der Kurve unter der Explosion erlaubt präzise Rückschlüsse über die Form und Veränderung des Newton-Polygons der lokalen definierenden Gleichung vor und nach der Explosion. Dies geschieht wie folgt. Sei  $a$  ein singulärer Punkt von  $C$ , und sei  $a'$  ein Punkt der strikt transformierten von  $C$ , in dem die Ordnung gleich geblieben ist.

Der Übergang zur Vervollständigung der lokalen Ringe ermöglicht es zunächst, das oben definierte Supremum der ausgewählten Steigung durch einen formalen Koordinatenwechsel bei  $a$  vor der Explosion als Maximum zu realisieren (dies ist i.a. im lokalen Ring selbst nicht möglich). Die Konstanz

der Ordnung der lokalen Gleichung impliziert nun, daß dieses Maximum in Koordinaten angenommen wird, bezüglich derer die Koordinatentransformation der Explosion beim Übergang von  $a$  zu  $a'$  einer *monomialen* Substitution der Variablen entspricht. Insbesondere folgt dann, daß die in  $a'$  induzierten Koordinaten wieder das Maximum der Steigung realisieren. Nun ist es ein Leichtes, die Veränderung der Steigung am Newton-Polygon abzulesen. Und in der Tat, die maximale Steigung fällt, wenn die Ordnung gleich geblieben ist. Damit ist der Induktionsschritt vollständig durchgeführt: Das der Singularität zugeordnete Paar von Zahlen fällt unter Explosion,

$$(r', s') <_{lex} (r, s).$$

Da  $\mathbf{N}^2$  mit der lexikographischen Ordnung wohlgeordnet ist, also jede absteigende Folge stationär wird, können wir Induktion über unsere Invariante anwenden. Nach endlich vielen Explosionen erreicht in jedem Punkt die lokale Auflösungsinvariante ihr Minimum. Dies tritt ein, wenn die Ordnung der Taylorentwicklung der definierenden Gleichung auf 1 gesunken ist (in welchem Fall die maximale Steigung irrelevant ist). Das heißt aber gerade, daß die Kurve im betrachteten Punkt glatt ist. Genau das war zu zeigen.

## 2. BEISPIELE

Wir diskutieren die wesentlichen Punkte der Konstruktion der Auflösungs-invariante an den folgenden drei Beispielen. Sei

$$f(y, z) = y^3 + z^4.$$

Die Variablensubstitution

$$(y, z) \mapsto (yz, z)$$

in  $f$  entspricht der Explosion des Nullpunktes in  $\mathbf{A}^2$  (betrachtet in einer affinen Karte). Wir erhalten als total Transformierte  $f^*$  von  $f$

$$f^* = f(yz, z) = y^3 z^3 + z^4.$$

Wir können aus  $f^*$  das irrelevante Monom  $z^3$  faktorisieren (dieses entspricht der exzeptionellen Komponente) und erhalten das Polynom

$$f'(y, z) = y^3 + z,$$

die strikt Transformierte von  $f$  in der betrachteten Karte. Die Ordnung von  $f'$  im Nullpunkt dieser Karte ist

$$\text{ord}_0 f' = 1 < 3 = \text{ord}_0 f,$$

also hat sich die Singularität von  $f$  verbessert (jeweils im Nullpunkt der Karten). Wir sind sogar nach einer Explosion bei einer regulären (einer Kurve mit Ordnung 1) angelangt.

Sei nun

$$f = y^3 + z^7.$$

Dann ist

$$f^* = f(yz, z) = y^3 z^3 + z^7 \quad \text{und} \quad f'(y, z) = y^3 + z^4.$$

Also gilt für die Ordnung

$$\text{ord}_0 f' = \text{ord}_0 f = 3.$$

Trotzdem hat sich die Situation verbessert, denn wir wissen vom vorherigen Beispiel, daß wir nach einer weiteren Explosion eine reguläre Kurve erhalten. Um dies auch anhand unserer Auflösungsinvariante zu sehen, betrachten wir die zweite Komponente der Invariante, die "Steigung" des Newton-Polygons. Die genaue Definition des Newton-Polygons und der zweiten Komponente der Invariante geben wir in den folgenden Abschnitten. In den Beispielen entspricht sie dem (kleinsten) Exponenten der Terme, die nur die Variable  $z$  enthalten (da das Newton-Polygon nur aus zwei Ecken besteht), also  $z^7$  und  $z^4$ . Wir sehen, daß

$$\text{stg}_0 f' = 4 < 7 = \text{stg}_0 f.$$

Damit ist

$$(\text{ord}_0 f', \text{stg}_0 f') <_{\text{lex}} (\text{ord}_0 f, \text{stg}_0 f),$$

und die Auflösungsinvariante ist (im Ursprung der betrachteten Karte) gefallen.

Wir betrachten nun ein Beispiel, in dem die Definition und die Beobachtung der Auflösungsinvariante

$$(r, s) = (\text{ord}_a f, \text{stg}_a f)$$

etwas subtiler ist. Sei

$$f(y, z) = y^3 z^2 + z^8 + y^9 + z^{12}.$$

Als Grundkörper wählen wir einen Körper der Charakteristik 3. Analoge Beispiele gibt es für jede beliebige Charakteristik.

Wie zuvor berechnen wir die total und strikt Transformierte von  $f$ , also

$$f^*(y, z) = f(yz, z) = y^3 z^5 + z^8 + y^9 z^9 + z^{12}$$

und

$$f'(y, z) = y^3 + z^3 + y^9 z^4 + z^7.$$

Die Ordnung von  $f'$  im Nullpunkt ist gefallen

$$\text{ord}_0 f' = 3 < 5 = \text{ord}_0 f,$$

und die Singularität von  $f$  hat sich verbessert. Wir explodieren nochmals den Nullpunkt. Eine analoge Rechnung wie vorher liefert als strikt transformierte

$$f''(y, z) = y^3 + 1 + y^9 z^{10} + z^4,$$

mit  $\text{ord}_0 f'' = 0$ . Im Nullpunkt der betrachteten Karte ist die Ordnung wieder gefallen (die Kurve  $V(f'')$  enthält nicht diesen Punkt). Hingegen gibt es einen Punkt in dieser Karte, nämlich  $a = (1, 0)$ , in dem die Ordnung von  $f''$  nicht gefallen ist. In der Tat, die Translation  $y \mapsto y - 1$  liefert die Taylorentwicklung

$$f''(y - 1, z) = y^3 + y^9 z^{10} - z^{10} + z^4$$

mit

$$\text{ord}_a f'' = 3.$$

Wir sind hier gezwungen, die zweite Komponente  $\text{stg}_a f$  der Invariante zu betrachten. Wir sehen

$$\text{stg}_0 f' = 3 \text{ und } \text{stg}_a f'' = 4.$$

Unsere Auflösungsinvariante ist (scheinbar) gestiegen. Doch Halt! Unsere Berechnung der Steigung von  $f'$  war zu naiv: Wechselt man etwa in  $f'$  die Koordinaten (was ja nicht verboten sein kann) vermöge

$$(y, z) \mapsto (y - z, z),$$

so hat  $f'$  die Taylorentwicklung

$$f' = f'(y - z, z) = y^3 + y^9 z^4 - z^{13} + z^7$$

im Nullpunkt. Die Ordnung ist mit  $\text{ord}_0 f' = 3$  unter diesem Koordinatenwechsel natürlich unverändert geblieben, aber die Steigung ist nun

$$\text{stg}_0 f' = 7.$$

Dies zeigt, daß unsere Definition der Steigung koordinatenabhängig war. Damit kann sie aber nicht aussagekräftig sein. Wir müssen als Maß der Komplexität der Singularität der Kurve ihrem Polynom  $f$  Invarianten zuordnen, die nicht von der Wahl von Koordinaten abhängen. Die Ordnung der Taylorentwicklung tut dies von vornherein. Bei der Steigung bietet sich an (und bewährt sich a posteriori bestens), das Supremum aller koordinatenabhängigen Steigungen

zu wählen (in der Vervollständigung des lokalen Ringes). Sofern es existiert, hängt es natürlich nicht von den Koordinaten ab.

In unserem Beispiel erkennen wir mit dieser Definition, daß

$$\text{stg}_0 f' = 7$$

maximal ist (unter allen Koordinatenwechseln) und ebenso

$$\text{stg}_a f'' = 4.$$

Zusammen sehen wir:

$$(\text{ord}_a f'', \text{stg}_a f'') <_{\text{lex}} (\text{ord}_0 f', \text{stg}_0 f').$$

Diese Ungleichung zeigt, daß die Singularität beim Übergang von  $f'$  auf  $f''$  in den betrachteten Punkten wirklich besser geworden ist.

Ein wichtiger Bestandteil des Auflösungsbeweises wird also das Studium der Steigung eines Polynoms in einem Punkt unter Koordinatenwechseln sein, sowie das Verhalten der maximalen Steigung unter Explosionen.

### 3. DAS NEWTON-POLYGON

Wir definieren in diesem Abschnitt das Newton-Polygon für eine Potenzreihe in zwei Variablen. Mit Hilfe dieses Polygons ordnen wir jeder Potenzreihe eine Zahl zu. Das Newton-Polygon ist aber von der Wahl des regulären Parametersystems abhängig. Wir untersuchen daher im Abschnitt 4 das Verhalten dieser Zahl bei Anwendung eines Automorphismus. Im Teil 5 definieren wir schließlich eine weitere Invariante neben der Ordnung und untersuchen deren Eigenschaften.

Sei  $k$  ein Körper. Bezeichne im folgenden  $R$  den formalen Potenzreihenring in zwei Variablen über  $k$ . Mit  $\mathfrak{m}$  bezeichnen wir das maximale Ideal von  $R$ . Sei  $\mathbf{y} = (y, z)$  ein reguläres Parametersystem von  $R$ . Wir kennzeichnen durch den Index  $\mathbf{y}$ , daß eine Definition von der Wahl des Parametersystems abhängt. Seien  $f \in R$ ,  $f \neq 0$ , und

$$(3.1) \quad f = f(y, z) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{y}^{\alpha}, \quad \text{mit } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}_0^2.$$

Die Menge

$$\Delta_{\mathbf{y}}(f) = \{\alpha \in \mathbf{N}_0^2 \text{ mit } c_{\alpha} \neq 0\}$$

nennen wir den *Träger* von  $f$ . Der Rand der konvexen Menge

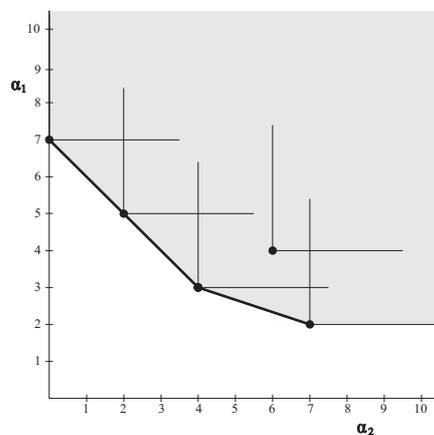


ABBILDUNG 5

Das Newton-Polygon von  $f = y^7 + y^5z^2 + y^3z^4 + y^4z^6 + y^2z^7$

$$\text{conv}\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta_y(f)} \{\alpha + \mathbf{R}_{\geq 0}^2\}\right) \subset \mathbf{R}_{\geq 0}^2$$

zerfällt in zwei Halbgeraden und einen kompakten Streckenzug. Diesen Streckenzug nennt man das *Newton-Polygon* von  $f$ . Die endliche Menge der Ecken des Newton-Polygons bezeichnen wir mit  $\text{NP}_y(f)$ . Das Newton-Polygon von  $f$  besteht genau dann aus nur einem Punkt, wenn  $f = y^{\alpha_1}z^{\alpha_2}e$  mit  $e \in R$  invertierbar.

**BEISPIEL 3.1.** Das Newton-Polygon von  $f = y^7 + y^5z^2 + y^3z^4 + y^4z^6 + y^2z^7$  und dessen Konstruktion ist in Abbildung 5 zu sehen. Die Menge der Ecken,  $\text{NP}_y(f)$ , ist  $\{(7, 0), (3, 4), (2, 7)\}$ .

Aus der Definition des Trägers und der Multiplikation zweier Potenzreihen folgt unmittelbar für  $f, g \in R$  mit  $f, g \neq 0$ .

$$(3.2) \quad \Delta_y(fg) \subset \Delta_y(f) + \Delta_y(g)$$

Seien  $f, e \in R$ ,  $f \neq 0$  und  $e$  invertierbar. Im allgemeinen ist nicht jedes Element des Trägers von  $f$  im Träger von  $fe$  enthalten. Zum Beispiel ist  $(y + yz)(1 - z) = y - yz^2$ . Es gilt aber folgendes Lemma.

**LEMMA 3.2.** Wenn  $\delta \in \text{NP}_y(f)$ , dann ist  $\delta \in \Delta_y(fe)$ .

*Beweis.* Wenn  $f$  auch invertierbar ist, gilt die Aussage trivialerweise. Seien  $f$  wie in (3.1) mit  $\text{ord} f \geq 1$ ,

$$e = \sum_{\beta} d_{\beta} \mathbf{y}^{\beta} \quad \text{und}$$

$$fe = \sum_{\gamma} b_{\gamma} \mathbf{y}^{\gamma}, \quad \text{mit } b_{\gamma} = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_{\alpha} d_{\beta}.$$

Angenommen  $b_{\delta} = 0$ . Dann gäbe es, da  $c_{\delta} d_0 \neq 0$ , ein  $c_{\alpha} \neq 0$  mit  $\alpha \neq \delta$  und  $\alpha_1 \leq \delta_1$ ,  $\alpha_2 \leq \delta_2$ . Also ein Widerspruch zur Annahme, daß  $\delta$  eine Ecke des Newton-Polygons von  $f$  ist.  $\square$

Mit diesem Lemma, (3.2) und der Definition des Newton-Polygons folgt:

LEMMA 3.3. Seien  $f, e \in R$ ,  $f \neq 0$  und  $e$  invertierbar. Dann ist

$$\text{NP}_{\mathbf{y}}(f) = \text{NP}_{\mathbf{y}}(fe).$$

Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$ , wie in (3.1) und  $r = \text{ord} f$ . Die Steigung von  $f$  bezüglich  $\mathbf{y}$  wird definiert als

$$\text{stg}_{\mathbf{y}} f = \inf \left\{ \frac{r\alpha_2}{r-\alpha_1} \text{ mit } \alpha \in \text{NP}_{\mathbf{y}}(f), \alpha \neq (r, 0) \right\} \in \mathbf{Q}_{>0} \cup \{\infty\},$$

wobei  $\inf \emptyset = \infty$ . Wenn  $\alpha \in \text{NP}_{\mathbf{y}}(f)$ ,  $\alpha \neq (r, 0)$ , dann ist  $(0, \frac{r\alpha_2}{r-\alpha_1})$  die Projektion von  $(\alpha_1, \alpha_2)$  durch  $(r, 0)$  auf die  $\alpha_2$ -Achse der Schnittpunkt der Geraden

$$l = \left\{ (\beta_1, \beta_2) \text{ mit } \frac{\alpha_2}{r-\alpha_1} \beta_1 + \beta_2 = \frac{r\alpha_2}{r-\alpha_1} \right\}$$

durch  $(r, 0)$  und  $(\alpha_1, \alpha_2)$  mit der  $\alpha_2$ -Achse. Also ist  $s = \text{stg}_{\mathbf{y}} f$  das Minus  $r$ -fache der Steigung des steilsten Segments des Newton-Polygons von  $f$ . Siehe Abbildung 6.

LEMMA 3.4. Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$  und  $r = \text{ord} f$ . Dann gilt:

- (i)  $\text{stg}_{\mathbf{y}} f \in \{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}_{>0} \text{ mit } p \text{ und } q \text{ teilerfremd und } 1 \leq q \leq r\} \cup \{\infty\}$ .
- (ii)  $r \leq \text{stg}_{\mathbf{y}} f \leq \infty$ .
- (iii)  $\text{stg}_{\mathbf{y}} f = r$  genau dann, wenn es ein  $\alpha \in \text{NP}_{\mathbf{y}}(f)$ ,  $\alpha \neq (r, 0)$ , mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = r$ , gibt.
- (iv)  $\text{stg}_{\mathbf{y}} f > r$  genau dann, wenn die Initialform  $f_r$  von  $f$  gleich  $c\mathbf{y}^r$  mit  $c \neq 0$  ist.
- (v)  $\text{stg}_{\mathbf{y}} f = \infty$  genau dann, wenn  $f = \mathbf{y}^r e$  mit  $e \in R$  invertierbar.

*Beweis.* Klar.  $\square$

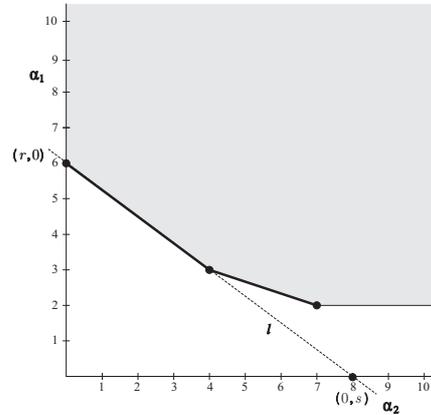


ABBILDUNG 6  
Die Steigung

Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$ , wie in (3.1),  $r = \text{ord} f$  und  $t \in \mathbf{R}$  mit  $t \geq r$ . Wir schreiben

$$F_t = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{y}^{\alpha}, \quad \text{Summe über } \alpha \text{ mit } \frac{t}{r} \alpha_1 + \alpha_2 = t \text{ bzw.}$$

$$F_{>t} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{y}^{\alpha}, \quad \text{Summe über } \alpha \text{ mit } \frac{t}{r} \alpha_1 + \alpha_2 > t.$$

Dann bestehen  $F_t$  bzw.  $F_{>t}$  aus allen Termen von  $f$  deren Exponenten auf bzw. oberhalb der Geraden durch  $(r, 0)$  und  $(0, t)$  liegen.

Sei  $s = \text{stg}_y f < \infty$ . Dann können wir  $f$  zerlegen in

$$(3.3) \quad f = F_s + F_{>s}.$$

Wenn  $r < s$ , dann besteht  $F_s$  nach Definition von  $s$  neben  $c \mathbf{y}^r$  aus noch mindestens einem Term.

LEMMA 3.5. Sei umgekehrt  $r \leq t \in \mathbf{R}$  so, daß

$$f = F_t + F_{>t}.$$

Wenn es in  $F_t$  einen Term  $c_{\alpha} \mathbf{y}^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  mit  $\alpha \neq (r, 0)$  gibt, dann ist  $\text{stg}_y f = t$ .

Beweis. Sei  $\alpha \in \Delta_y(f)$ ,  $\alpha_1 < r$ . Aus  $\frac{t}{r} \alpha_1 + \alpha_2 \geq t$  folgt

$$\frac{r \alpha_2}{r - \alpha_1} \geq t.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein  $\alpha \in \text{NP}_y(f)$  mit  $\frac{t}{r}\alpha_1 + \alpha_2 = t$ , d.h.,

$$t = \frac{r\alpha_2}{r - \alpha_1}.$$

Damit ist  $\text{stg}_y f = t$ .  $\square$

#### 4. KOORDINATENWECHSEL

Es bezeichne  $G = \mathbf{Aut}_k(R)$  die Gruppe der  $k$ -Algebrenautomorphismen des formalen Potenzreihenringes  $R$  in zwei Variablen. Um die Beziehung zwischen  $\text{stg}_y f$  und  $\text{stg}_y \varphi(f) = \text{stg}_{\varphi^{-1}y} f$  für ein  $\varphi \in G$  zu untersuchen, verwenden wir die Möglichkeit der Gauß-Bruhat-Zerlegung  $\varphi = ulp$  von  $\varphi$  mit  $u \in U$ ,  $l \in L$  und  $p \in P$ , siehe Abschnitt A.2.

Sei zunächst  $u \in U$ . Dann ist

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_1 = u(y) &= ay + yh_1, & \text{mit } \text{ord } h_1 &\geq 1, a \neq 0, \\ u_2 = u(z) &= by + cz + h_2, & \text{mit } \text{ord } h_2 &\geq 2, c \neq 0. \end{aligned}$$

Das Newton-Polygon von  $f$  ist im allgemeinen nicht gleich dem Newton-Polygon von  $u(f)$ . Betrachte zum Beispiel  $f = z$  und  $u$  den zu  $\bar{u} = (y, y+z)$  gehörigen Substitutionshomomorphismus, d. h.,  $u(f) = f(y, y+z) = y+z$ .

LEMMA 4.1. Seien  $f = y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  mit  $\alpha \neq 0$  und  $u \in U$ . Dann gilt (siehe Abbildung 7)  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta_y(u(f))$  und

$$\begin{aligned} \Delta_y(u(f)) &\subset \{\beta \in \mathbf{N}_0^2 \text{ mit } \beta_1 - \alpha_1 \geq \alpha_2 - \beta_2 \text{ und } \beta_1 \geq \alpha_1\} \\ &= \text{conv}(\{(\alpha_1 + \alpha_2, 0) + \mathbf{R}_{\geq 0}^2\} \cup \{(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{R}_{\geq 0}^2\}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} u(f) &= u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} = (ay + yh_1)^{\alpha_1} ((cz + by) + h_2)^{\alpha_2} \\ &= dy^{\alpha_1} z^{\alpha_2} + y^{\alpha_1} \sum_{k=1}^{\alpha_2} d_k y^k z^{\alpha_2 - k} + y^{\alpha_1} h \end{aligned}$$

mit  $d \neq 0$  und  $\text{ord } h > \alpha_2$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

LEMMA 4.2. Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$ ,  $r = \text{ord } f$  und  $u \in U$ . Dann gilt:  
(i) Wenn  $\text{stg}_y f > r$ , dann ist  $\text{NP}_y(f) = \text{NP}_y(u(f))$ .

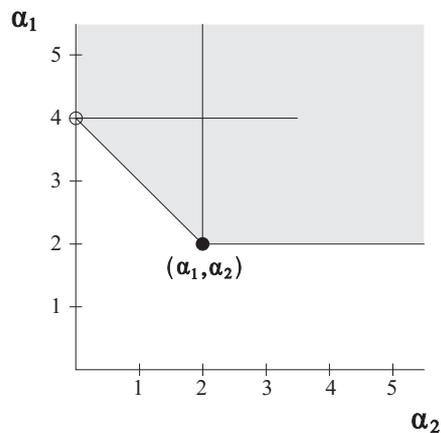


ABBILDUNG 7  
Koordinatenwechsel:  $\Delta_y u(y^{\alpha_1} z^{\alpha_2})$

(ii)  $\text{stg}_y f = \text{stg}_y u(f)$ .

*Beweis.* Zu (i): Da  $\text{stg}_y f > r$ , ist mit Lemma 3.4  $(r, 0) \in \Delta_y(f)$ . Mit der vorherigen Behauptung und der Definition des Newton-Polygons folgt daraus  $\text{NP}_y(f) = \text{NP}_y(u(f))$ .

Zu (ii): Sei  $\text{stg}_y f = r$ . Nach Lemma 3.4 gibt es ein  $\alpha \in \text{NP}_y(f)$ ,  $\alpha \neq (r, 0)$ , mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = r$ . Wenn es zwei solche  $\alpha \in \text{NP}_y(f)$  gibt, dann betrachten wir das mit der kleineren  $\alpha_1$ -Koordinate. Nach der vorherigen Behauptung ist dann  $\alpha \in \text{NP}_y(u(f))$  und damit  $\text{stg}_y u(f) = \text{stg}_y f = r$ .  $\square$

Sei nun  $l \in L$ . Dann ist

$$(4.2) \quad \begin{aligned} l_1 = l(y) &= y + g, & \text{mit } g \in k[[z]], \text{ ord } g \geq 1, \\ l_2 = l(z) &= z. \end{aligned}$$

Wenn wir  $\text{stg}_y f$  und  $\text{stg}_y l(f)$  vergleichen, können wir im allgemeinen nichts aussagen, wie folgendes Beispiel belegt:

BEISPIEL 4.3. Sei  $l(y) = y + z$ .

- Mit  $f = y^2 + z^3$  ist  $l(f) = y^2 + 2yz + z^2 + z^3$ , also  $2 = \text{stg}_y l(f) < \text{stg}_y f = 3$ .
- Mit  $f = y^2 + yz$  ist  $l(f) = y^2 + 3yz + 2z^2$ , also  $2 = \text{stg}_y l(f) = \text{stg}_y f = 2$ .
- Mit  $f = y^2 - 2yz + z^2 + z^3 = (y - z)^2 + z^3$  ist  $l(f) = y^2 + z^3$ , also  $3 = \text{stg}_y l(f) > \text{stg}_y f = 2$ .

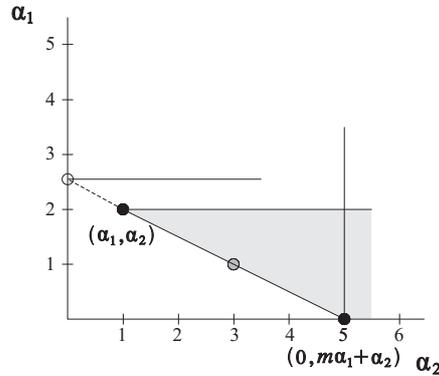


ABBILDUNG 8  
Koordinatenwechsel:  $\Delta_y l(y^{\alpha_1} z^{\alpha_2})$

- Mit  $f = y^2 - 2yz + z^2 = (y - z)^2$  ist  $l(f) = y^2$ , also  $\text{stg}_y l(f) = \infty$ .

Außerdem kann  $\text{stg}_y l(f)$  von der Charakteristik von  $k$  abhängen. Mit  $l$  wie im vorherigen Beispiel und  $f = y^2 + z^2$  ist  $l(f) = y^2 + 2yz + 2z^2$ . Wenn  $\text{char } k = 2$ , dann ist  $\text{stg}_y l(f) = \infty$ , sonst  $\text{stg}_y l(f) = 2$ .

Sei  $l \in L$  wie in (4.2). Wir werden nun den Zusammenhang zwischen

$$\text{stg}_y f, \text{stg}_y l(f) \text{ und } m = \text{ord } g$$

untersuchen.

LEMMA 4.4. Seien  $f = y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  mit  $\alpha \neq 0$  und  $l \in L$ . Dann gilt (siehe Abbildung 8)  $(\alpha_1, \alpha_2), (0, m\alpha_1 + \alpha_2) \in \Delta_y(l(f))$  und

$$\begin{aligned} \Delta_y(l(f)) &\subset \{ \beta \in \mathbf{N}_0^2 \text{ mit } \beta_2 - \alpha_2 \geq m(\alpha_1 - \beta_1) \text{ und } \beta_1 \leq \alpha_1 \} \\ &\subset \text{conv}(\{ \left( \frac{m\alpha_1 + \alpha_2}{m}, 0 \right) + \mathbf{R}_{\geq 0}^2 \} \cup \{ (0, m\alpha_1 + \alpha_2) + \mathbf{R}_{\geq 0}^2 \}). \end{aligned}$$

Wenn  $\text{char } k = 0$ , dann ist außerdem  $(\alpha_1 - k, mk + \alpha_2) \in \Delta_y(l(f))$  für  $k = 1, \dots, \alpha_1 - 1$ .

*Beweis.* Es ist

$$(4.3) \quad l(f) = (y + g)^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} + g^{\alpha_1} z^{\alpha_2} + \left( \sum_{k=1}^{\alpha_1-1} \binom{\alpha_1}{k} y^{\alpha_1-k} g^k \right) z^{\alpha_2}.$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

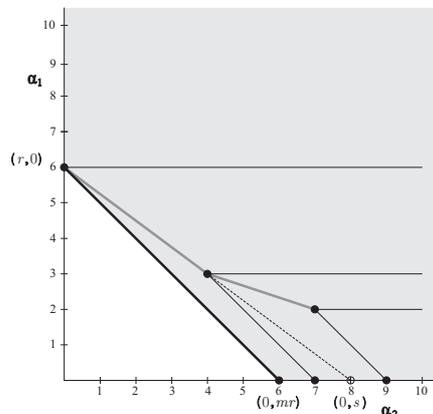


ABBILDUNG 9

Koordinatenwechsel:  $\Delta_y l(f)$  mit  $m < \frac{s}{r}$ 

Sei jetzt wieder  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$  und bezeichne  $r = \text{ord} f$ ,  $s = \text{stg}_y f$  und  $m = \text{ord} g$ .

LEMMA 4.5. Wenn  $m < \frac{s}{r}$ , dann ist  $\text{stg}_y l(f) = mr$  (siehe Abbildung 9).

*Beweis.* Sei zunächst  $\text{stg}_y f < \infty$ . Wir zerlegen  $f$  in (siehe (3.3))

$$f = cy^r + \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha}, \quad \text{mit } \frac{s}{r} \alpha_1 + \alpha_2 \geq s, \quad \alpha \neq (r, 0) \text{ und } c \neq 0.$$

Aus  $\alpha \neq (r, 0)$  folgt für  $\alpha_1 \geq r$ , daß  $m\alpha_1 + \alpha_2 > mr$ . Wenn  $\alpha_1 < r$ , dann impliziert

$$\frac{r\alpha_2}{r - \alpha_1} \geq s > mr$$

wieder  $m\alpha_1 + \alpha_2 > mr$ . Mit der vorherigen Behauptung ist damit

$$\Delta_y(l(cy^r)) \subset \Delta_y(l(f)) \quad \text{und} \quad \{(r, 0), (0, mr)\} = \text{NP}_y(l(f)),$$

also  $\text{stg}_y l(f) = mr$ .

Wenn  $\text{stg}_y f = \infty$ , dann ist

$$f = y^r e, \quad \text{mit } e \in R \text{ invertierbar.}$$

Damit ist

$$l(f) = l(y^r)e(y + g, z).$$

Daraus folgt mit dem vorherigen Lemma und Lemma 3.3 die Behauptung.  $\square$

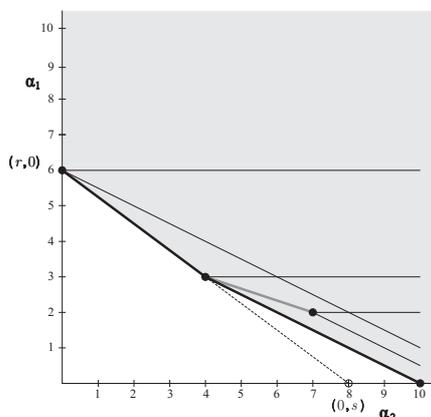


ABBILDUNG 10  
 Koordinatenwechsel:  $\Delta_y l(f)$  mit  $m > \frac{s}{r}$

LEMMA 4.6. Wenn  $m > \frac{s}{r}$ , dann ist  $\text{stg}_y f = \text{stg}_y l(f)$  (siehe Abbildung 10).

*Beweis.* Wir zerlegen  $f$  wie in (3.3) in

$$f = F_s + F_{>s}.$$

Die Exponenten  $\alpha$  der Terme  $c_a y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  von  $F_{>s}$  erfüllen nach Definition

$$\frac{s}{r} \alpha_1 + \alpha_2 > s.$$

Mit Lemma 4.4 und der Voraussetzung gilt diese Ungleichung auch für die Exponenten der Terme von  $l(F_{>s})$ . Für einen Term  $c_a y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  von  $F_s$  erkennt man mit dem gleichen Argument, daß  $l(c_a y^{\alpha_1} z^{\alpha_2})$  aus  $c_a y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  und Termen besteht, deren Exponenten wieder die obigen Ungleichung erfüllen. Also ist

$$l(f) = F_s + F'_{>s}.$$

Mit Lemma 3.5 gilt dann  $\text{stg}_y l(f) = \text{stg}_y f$ .  $\square$

LEMMA 4.7. Wenn  $m \neq \frac{s}{r}$ , dann ist  $\text{stg}_y l(f) \leq \text{stg}_y f$ .

*Beweis.* Klar mit den zwei vorherigen Lemmata.  $\square$

SATZ 4.8. Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$ , mit  $s = \text{stg}_y f < \infty$ ,  $r = \text{ord} f$  und  $f = F_s + F_{>s}$  wie in (3.3). Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein  $l \in L$  mit  $\text{stg}_y l(f) > \text{stg}_y f$ .
2.  $\frac{s}{r} \in \mathbf{N}$  und

$$F_s = c \left( y - dz^{\frac{s}{r}} \right)^r, \quad \text{mit } c, d \in k, c, d \neq 0.$$

*Beweis.* Sei  $\frac{s}{r} \in \mathbf{N}$  und

$$F_s = c \left( y - dz^{\frac{s}{r}} \right)^r.$$

Sei  $l$  der zu  $\bar{l} = (y + dz^{\frac{s}{r}}, z)$  gehörige Einsetzungshomomorphismus. Dann ist

$$l(f) = l(F_s) + l(F_{>s}) = cy^r + l(F_{>s}).$$

Mit Lemma (4.4) sieht man, daß  $l(F_{>s}) = F'_{>s}$ . Daraus folgt entweder  $\text{NP}_y(l(f)) = \{(r, 0)\}$ , also  $\text{stg}_y l(f) = \infty$ , oder

$$\frac{r\alpha_2}{r - \alpha_1} > s, \quad \text{für } \alpha \in \text{NP}_y(f), \alpha \neq (r, 0).$$

Damit gilt wieder  $\text{stg}_y l(f) > \text{stg}_y f$ .

Sei nun umgekehrt  $l \in L$  mit  $\text{stg}_y l(f) > \text{stg}_y f$ . Seien  $l(y) = y + g$  und

$$g = \sum_{i=m}^{\infty} a_i z^i \in zk[[z]], \quad \text{mit } m = \text{ord } g.$$

Aus Lemma 4.7 folgt  $\frac{s}{r} = m \in \mathbf{N}$ . Wie zuvor ist  $l(F_{>s}) = F'_{>s}$ . Weiters ist (siehe (4.3))

$$l(F_s) = F_s(y + g, z) = F_s(y + a_m z^m, z) + G_{>s}$$

und damit

$$l(f) = F_s(y + a_m z^m, z) + H_{>s}.$$

Weil

$$F_s(y + a_m z^m, z) = F'_s,$$

und nach Voraussetzung  $\text{stg}_y l(f) > \text{stg}_y(f)$ , muß dann

$$F_s(y + a_m z^{\frac{s}{r}}, z) = cy^r, \quad \text{mit } c \neq 0$$

gelten. Also ist

$$F_s(y, z) = c \left( y - a_m z^{\frac{s}{r}} \right)^r.$$

□

Sei  $p$  die Vertauschung von  $y$  und  $z$ . Dann ergibt sich mit Lemma 3.4:

LEMMA 4.9. *Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$  und  $r = \text{ord} f$ . Dann gilt:*

- (i)  $\text{stg}_y p(f) = r$  genau dann, wenn es ein  $\alpha \in \text{NP}_y(f)$ ,  $\alpha \neq (0, r)$ , mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = r$ , gibt.
- (ii)  $\text{stg}_y p(f) > r$  genau dann, wenn die Initialform  $f_r$  von  $f$  gleich  $cz^r$  mit  $c \neq 0$  ist.
- (iii)  $\text{stg}_y p(f) = \infty$  genau dann, wenn  $f = z^r e$  mit  $e \in R$  invertierbar.

### 5. DIE MAXIMALE STEIGUNG

Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$  und  $G = \text{Aut}_k(R)$ . Setze

$$\begin{aligned} S(f) &= \{\text{stg}_y \varphi(f) \text{ mit } \varphi \in G\} \\ &= \{\text{stg}_y f \text{ mit } \mathbf{y} = (y, z) \text{ reguläres Parametersystem von } R\}. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\text{stg} f = \sup S(f),$$

als das Supremum über alle koordinatenabhängigen Steigungen, vgl. [Ab1] (in [BK] folgt aus maximalem Kontakt die Maximalität der Steigung). Offenbar ist  $\text{stg} f$  invariant bei einem Wechsel des Parametersystems. Nach Satz A.7 (Gauß-Bruhat Zerlegung) können wir jedes  $\varphi \in G$  schreiben als Produkt  $\varphi = ulp$  mit  $u \in U$ ,  $l \in L$  und  $p \in P$ . Mit Lemma 4.2 ist dann

$$\text{stg}_y \varphi(f) = \text{stg}_y ulp(f) = \text{stg}_y u^{-1}(ulp(f)) = \text{stg}_y lp(f).$$

Also ist

$$S(f) = \{\text{stg}_y lp(f) \text{ mit } l \in L \text{ und } p \in P\}.$$

Wenn  $\text{stg} f < \infty$ , dann erkennt man mit Lemma 3.4 (i), daß  $S(f)$  eine endliche Menge ist. Also ist in diesem Fall das Supremum ein Maximum, d.h., es gibt ein  $l \in L$  so, daß nach einer eventuellen Vertauschung  $p \in P$  der Variablen die Gleichung  $\text{stg}_y lp(f) = \text{stg} f$  gilt. Insbesondere gibt es ein reguläres Parametersystem  $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}, \tilde{z})$  von  $R$  mit

$$\text{stg}_{\tilde{\mathbf{y}}} f = \text{stg} f, \quad \text{mit } f = f(\tilde{y}, \tilde{z}).$$

Wir sagen dann, das Parametersystem  $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}, \tilde{z})$  realisiert  $\text{stg} f$ . Unmittelbar aus Lemma 3.3 folgt:

LEMMA 5.1. Seien  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$  und  $e \in R$  invertierbar. Dann ist  $\text{stg}f = \text{stg}fe$ .

Wir kommen nun zum Fall  $\text{stg}f = \infty$ . Aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz folgt:

LEMMA 5.2. Sei  $f \in R$  mit  $\text{ord}f = 1$ . Dann ist  $\text{stg}f = \infty$ .

SATZ 5.3. Sei  $f = f(y, z) \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$  mit  $r = \text{ord}f < \text{stg}_y f$ . Dann ist  $\text{stg}f = \infty$  genau dann, wenn es ein  $l \in L$  gibt so, daß  $\text{stg}_y l(f) = \infty$ .

*Beweis.* Sei also  $\text{stg}f = \infty$ . Wir konstruieren das gesuchte  $l \in L$  mit  $\text{stg}_y l(f) = \infty$  induktiv. Sei  $s_1 = \text{stg}_y f$ . Falls  $s_1 = \infty$  ist, sind wir fertig. Sonst folgt aus der Voraussetzung, daß es ein  $l_1 \in L$  und ein  $p_1 \in P$  gibt mit  $s_1 < \text{stg}_y l_1 p_1(f)$ . Angenommen  $p_1$  ist nicht die Identität. Da  $f_r = cy^r$  mit  $c \in k$ ,  $c \neq 0$  ist, wäre dann aber  $\text{stg}_y l_1 p_1(f) = r$  wegen Lemma 3.4. Also ist  $p_1$  die Identität. Mit Satz 4.8 folgt daher

$$m_1 = \frac{s_1}{r} \in \mathbf{N} \quad \text{und} \quad f = c(y - a_1 z^{m_1})^r + F_{>s_1}, \quad \text{mit } c, a_1 \in k, c, a_1 \neq 0.$$

Wie im Beweis zu Satz 4.8 erkennt man, daß

$$s_1 < s_2 := \text{stg}_y f(y + a_1 z^{m_1}, z).$$

Wenn  $s_2 = \infty$  ist, sind wir am Ziel, sonst beginnen wir wieder von neuem. Entweder sind wir nach endlich vielen Schritten fertig, oder wir haben für jedes  $n \in \mathbf{N}$  ein  $a_n \in k$  und ein  $s_n \in \mathbf{N}$  mit  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$  und  $m_n = s_n/r \in \mathbf{N}$  so, daß

$$f(y + \sum_{i=1}^n a_i z^{m_i}, z) = cy^r + B_n,$$

$$B_n = \sum c_{\alpha}^n y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}, \quad \text{mit } \frac{s_{n+1}}{r} \alpha_1 + \alpha_2 \geq s_{n+1}, \alpha \neq (r, 0) \text{ und } c \neq 0.$$

Die Summe  $B_n$  zerlegen wir in

$$B_n = y^r C_n + D_n,$$

$$C_n = \sum c_{\alpha}^n y^{\alpha_1 - r} z^{\alpha_2}, \quad \text{mit } \alpha_1 \geq r \text{ und}$$

$$D_n = \sum c_{\alpha}^n y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}, \quad \text{mit } \alpha_1 < r.$$

Aus den beiden Ungleichungen für die Exponenten der Terme von  $D_n$  folgt wegen  $s_n \rightarrow \infty$ , daß die Ordnung von  $D_n$  beliebig groß wird. Sei  $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^{m_i}$ . Wir erhalten für  $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} f(y + g, z) &= f\left(y + \sum_{i=1}^n a_i z^{m_i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^{m_i}, z\right) \\ &= f\left(y + \sum_{i=1}^n a_i z^{m_i}, z\right) + h_n, \quad \text{mit } \text{ord } h_n \geq m_{n+1}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert  $C_n$  in  $R$  und mit  $C = \lim C_n$  ist

$$f(y + g, z) = cy^r + y^r C.$$

Für den Automorphismus  $l \in L$  gegeben durch  $(y, z) \mapsto (y + g, z)$  ist dann  $\text{stg}_y l(f) = \infty$ .

Die umgekehrte Implikation ist trivial.  $\square$

**KOROLLAR 5.4.** Sei  $f = f(y, z) \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$ . Dann gibt es ein  $l \in L$  und ein  $p \in P$  so, daß  $\text{stg } f = \text{stg}_y lp(f)$ .

*Beweis.* Seien  $\text{stg } f = \infty$  und  $\text{stg}_y f = \text{ord } f = r$ . Dann gibt es ein  $l_0 \in L$  und ein  $p_0 \in P$  mit  $\text{stg}_y l_0 p_0(f) > r$ , und wir können den vorherigen Satz anwenden. Wenn  $\text{stg } f$  endlich ist, so haben wir uns schon zu Beginn des Abschnittes überlegt, daß es ein  $l \in L$  und ein  $p \in P$  gibt mit  $\text{stg } f = \text{stg}_y lp(f)$ .  $\square$

Insbesondere bedeutet dieses Korollar, daß es für jede Potenzreihe  $f \in R$  ein reguläres Parametersystem  $\mathbf{y} = (y, z)$  von  $R$  gibt, das  $\text{stg } f$  realisiert, also so, daß

$$\text{stg}_y f = \text{stg } f, \quad \text{mit } f = f(y, z).$$

Eine zum ersten Teil des Beweises von Satz 5.3 analoge Argumentation zeigt auch folgenden Satz.

**SATZ 5.5.** Sei  $f = f(y, z) \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$  mit  $\text{stg } f < \infty$ . Dann gibt es ein Polynom

$$g = \sum_{i=1}^n a_i z^{m_i} \in zk[z]$$

und ein  $p \in P$  so, daß  $\text{stg } f = \text{stg}_y lp(f)$  mit  $\bar{l} = (y + g, z)$ .

## 6. DIE AUFLÖSUNGSINVARIANTE

Wir fassen im folgenden durch die Taylorentwicklung von Polynomen im Nullpunkt den Polynomring  $k[y, z]$  als Unterring von  $k[[y, z]]$  auf. Damit

können wir die Begriffe bzw. Ergebnisse von Abschnitt 5 auch auf Polynome anwenden. Sei  $f \in k[y, z] \setminus k$ . Wenn  $r = \text{ord}f \geq 1$ , dann setzen wir

$$\text{stg}_0 f = \text{stg}f,$$

und  $\text{stg}_0 f = \infty$ , wenn  $\text{ord}f = 0$ . Für einen beliebigen Punkt  $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{A}^2$  definieren wir

$$\text{stg}_a f = \text{stg}_0 \tilde{f}, \quad \text{mit } \tilde{f}(y, z) = f(y + a_1, z + a_2).$$

LEMMA 6.1. Sei  $a \in \mathbf{A}^2$ . Dann gilt:

- (i) Wenn  $a$  ein regulärer Punkt von  $f$  ist, dann ist  $\text{stg}_a f = \infty$ .
- (ii) Wenn  $a$  ein singulärer Punkt von  $f$  ist, dann ist  $\text{stg}_a f \in S_r$  mit  $r = \text{ord}_a f$  und

$$S_r = \left\{ s = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}_{>0} \text{ mit } r \leq s, p \text{ und } q \text{ teilerfremd, } 1 \leq q \leq r \right\} \cup \{\infty\}.$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus Lemma 5.2, die zweite aus Lemma 3.4.  $\square$

Seien  $S_r$  mit  $r \geq 2$  wie oben und  $S_1 = S_0 = \{\infty\}$ . Wir betrachten die Menge

$$I = \bigcup_{r \in \mathbf{N}_0} \{r\} \times S_r \subset \mathbf{N}_0 \times (\mathbf{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$$

mit der lexikographischen Ordnung  $<_{lex}$ . Für einen Punkt  $a \in \mathbf{A}^2$  ist dann die *Auflösungsvariante* von  $f$  in  $a$  definiert als das Paar

$$\text{inv}_a f = (\text{ord}_a f, \text{stg}_a f) \in I.$$

Offensichtlich ist  $<_{lex}$  eine totale Ordnung mit kleinstem Element  $(0, \infty)$ . Wir zeigen, daß  $<_{lex}$  eine Wohlordnung auf  $I$  ist. Sei dazu  $J \subset I$  nicht-leer. Seien  $p_1: J \rightarrow \mathbf{N}_0$  die Projektion auf die erste Komponente und  $r = \min\{p_1(J)\} \subset \mathbf{N}_0$ . Wenn  $r = 0$  bzw.  $r = 1$ , dann ist  $(0, \infty)$  bzw.  $(1, \infty)$  das kleinste Element von  $J$ . Sei also  $r \geq 2$ . Setze  $K = J \cap \{r\} \times S_r$  und

$$f: K \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}, (r, s) \mapsto r!s.$$

Die Abbildung ist injektiv und erhält die Ordnung. Die Behauptung folgt.

7. AUFGELÖSTE PUNKTE

Wir betrachten nun die lokal definierende Gleichung von singulären Punkten einer ebenen Kurve. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den affinen Fall. Im allgemeinen Fall ist die Gleichung der Kurve nach Vervollständigung im betrachteten Punkt durch eine formale Potenzreihe gegeben. Die Argumentation ist dann ähnlich. Sei also  $f \in k[[y, z]] \setminus k$  das definierende Polynom einer algebraischen Kurve in  $\mathbf{A}^2$ . Mit  $V(f) = \{a \in \mathbf{A}^2 \text{ mit } f(a) = 0\}$  bezeichnen wir die Nullstellenmenge von  $f$ .

Wir nennen den Nullpunkt einen *aufgelösten* Punkt von  $f$ , wenn  $f(0) \neq 0$ , oder wenn es Polynome  $g, h \in k[[y, z]]$  mit  $\text{ord}_0 g = 1$  und  $\text{ord}_0 h = 0$  und ein  $n \in \mathbf{N}$  gibt so, daß

$$(7.1) \quad f = g^n h.$$

Einen beliebigen Punkt  $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{A}^2$  nennen wir einen *aufgelösten* Punkt von  $f$ , wenn der Nullpunkt von  $\tilde{f} = f(y + a_1, z + a_2)$  aufgelöst ist.

Sei  $f = c f_1^{b_1} \cdots f_r^{b_r}$  die Primfaktorzerlegung von  $f$  in  $k[[x, y]]$ . Bezeichne

$$f_{red} = f_1 \cdots f_r$$

die *Reduktion* von  $f$ ;  $f_{red}$  ist eindeutig bis auf einen konstanten Faktor und hat die gleiche Nullstellenmenge wie  $f$ . Sei  $a \in V(f)$ . Dann ist  $a$  genau dann ein aufgelöster Punkt von  $f$ , wenn  $a$  ein regulärer Punkt von  $f_{red}$  ist. Also ist

$$\{a \in \mathbf{A}^2 \text{ mit } a \text{ nicht aufgelöster Punkt von } f\} = \text{Sing}(f_{red}).$$

Da eine reduzierte ebene Kurve nur endlich viele singuläre Punkte hat, folgt nun:

**SATZ 7.1.** *Seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f \in k[[y, z]] \setminus k$ . Dann ist die Menge der nicht aufgelösten Punkte von  $f$  endlich.*

Sei  $a \in V(f)$ . Wir wollen im folgenden beweisen, daß  $a$  genau dann ein aufgelöster Punkt von  $f$  ist, wenn  $\text{stg}_a f = \infty$ , siehe Satz 7.6. Nach einer Translation in  $\mathbf{A}^2$  können wir uns auf den Nullpunkt beschränken.

**SATZ 7.2.** *Seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f \in k[[y, z]]$  irreduzibel. Dann ist  $f \in k[[y, z]]$  reduziert.*

*Beweis.* Angenommen,  $f$  ist als Potenzreihe nicht reduziert. Dann ist

$$f = g^2 h, \quad \text{mit } g, h \in k[[y, z]] \text{ und } \text{ord } g \geq 1.$$

Für  $\text{ord} f = 0$  und  $\text{ord} f = 1$  folgt daraus ein Widerspruch. Sei also  $\text{ord} f \geq 2$ . Angenommen  $\partial_y f \neq 0$ . Dann sind  $\partial_y f$  und  $f$  teilerfremd in  $k[y, z]$ , weil  $f$  irreduzibel und  $\deg \partial_y f \leq \deg f - 1$  ist. Weiters ist  $\text{ord} \partial_y f \geq 1$ . Mit der Produktregel folgt

$$\partial_y f = \partial_y(g^2 h) = g(g \partial_y h + 2h \partial_y g).$$

Daher ist  $g$  ein echter gemeinsamer Teiler von  $f$  und  $\partial_y f$  in  $k[[y, z]]$ . Das ist aber ein Widerspruch zu Korollar A.5. Also ist  $\partial_y f = 0$ . Analog dazu schließt man, daß auch  $\partial_z f = 0$  ist. Aber  $\partial_y f = \partial_z f = 0$  impliziert  $f \in k$ , wenn  $\text{char} k = 0$ . Widerspruch.

Wenn  $\text{char} k = p > 0$ , dann bedeutet das Verschwinden der partiellen Ableitungen, daß  $f$  nur aus Termen der Form  $c_\alpha y^{p\alpha_1} z^{p\alpha_2}$  besteht. Indem man die Identität  $(a+b)^p = a^p + b^p$  für einen Körper der Charakteristik  $p$  anwendet und benützt, daß es in einem algebraisch abgeschlossenen Körper insbesondere auch  $p$ -te Wurzeln gibt, erkennt man, daß

$$f = \sum c_\alpha y^{p\alpha_1} z^{p\alpha_2} = \left( \sum d_\alpha y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} \right)^p, \quad \text{mit } d_\alpha^p = c_\alpha.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität von  $f$ .  $\square$

Ein Körper  $k$  heißt *perfekt*, wenn  $\text{char} k = 0$  oder wenn für  $\text{char} k = p$  jedes Element in  $k$  eine  $p$ -te Wurzel besitzt. Neben algebraisch abgeschlossenen Körpern sind zum Beispiel auch alle endlichen Körper perfekt. Im Beweis zum vorherigen Satz verwenden wir nur diese Eigenschaft von  $k$ . Damit sind Satz 7.2, Lemma 7.4 und Satz 7.6 auch für perfekte Körper gültig.

Wir erinnern hier kurz an ein Ergebnis von Abschnitt 5 und leiten einige einfache Folgerungen daraus ab, die im folgenden benötigen. Seien  $R$  wieder der formale Potenzreihenring in zwei Variablen über einem Körper  $k$  und  $\mathbf{y} = (y, z)$  ein reguläres Parametersystem von  $R$ . Seien weiters  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $R$  und  $G = \mathbf{Aut}_k(R)$  die Gruppe der  $k$ -Algebrenautomorphismen.

Sei  $f = f(y, z) \in R$ ,  $f \neq 0$ , mit  $r = \text{ord} f \geq 1$  und  $\text{stg} f = \infty$ . Dann gibt es nach Korollar 5.4 und Lemma 3.4 (v) ein  $\varphi \in G$  mit

$$\varphi(f) = y^r \tilde{z}, \quad \text{mit } \tilde{z} \in R \text{ invertierbar.}$$

Sei  $g = \varphi^{-1}(y) \in R$ . Dann ist  $g$  irreduzibel, weil  $\text{ord} g = 1$ , und

$$(7.2) \quad f = g^r e, \quad \text{mit } g, e \in R, g \text{ irreduzibel und } e \text{ invertierbar.}$$

Wir verwenden weiters, daß  $R$  ein faktorieller Ring ist.

LEMMA 7.3. Seien  $k$  ein Körper und  $f \in R$ ,  $f \neq 0$ , mit  $\text{stg}f < \infty$  und  $r = \text{ord}f \geq 1$ . Dann ist  $\text{stg}f^n < \infty$  für  $n \in \mathbf{N}$ .

*Beweis.* Angenommen  $\text{stg}f^n = \infty$ . Dann ist  $f^n = g^m e$  mit  $g = \varphi^{-1}(y)$  und  $\varphi$  wie oben. Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt  $f = g^r \tilde{e}$ . Also ist

$$\varphi(f) = y^r e', \quad \text{mit } e' \in R \text{ invertierbar}$$

und damit  $\text{stg}f = \infty$ . Widerspruch.  $\square$

LEMMA 7.4. Seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f \in k[y, z]$  irreduzibel mit  $\text{ord}f \geq 2$  (d.h.,  $0$  ist ein singulärer Punkt von  $f$ ). Dann ist  $\text{stg}_0 f < \infty$ .

*Beweis.* Indirekt. Sei  $\text{stg}_0 f = \infty$ . Da  $\text{ord}f \geq 2$  folgt mit (7.2), daß  $f$  als Potenzreihe nicht reduziert ist. Widerspruch zu Satz 7.2.  $\square$

LEMMA 7.5. Seien  $k$  ein Körper und  $f_1, f_2 \in k[y, z]$  teilerfremd mit  $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}$ . Dann ist  $\text{stg}_0(f_1 f_2) < \infty$ .

*Beweis.* Angenommen  $\text{stg}_0(f_1 f_2) = \infty$ . Mit (7.2) ist dann

$$f_1 f_2 = g^r e, \quad \text{mit } g, e \in R, g \text{ irreduzibel und } e \text{ invertierbar.}$$

Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in  $R$  folgt, daß  $g$  ein echter Teiler von  $f_1$  und  $f_2$  in  $R$  ist. Das ist ein Widerspruch zu Korollar A.5.  $\square$

SATZ 7.6. Seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f \in k[y, z] \setminus k$ . Dann sind äquivalent:

1.  $0$  ist ein aufgelöster Punkt von  $f$ .
2.  $\text{stg}_0 f = \infty$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $0$  ein aufgelöster Punkt von  $f$ . Wenn  $0 \notin V(f)$  ist, dann ist  $\text{stg}_0 f = \infty$  nach Definition der Steigung. Sei also  $0 \in V(f)$ . Dann ist  $f = g^n h$  wie in (7.1). Nach Lemma 5.2 ist  $\text{stg}_0 g = \infty$ . Also gibt es ein  $\varphi \in G$  mit  $\varphi(g) = y \tilde{e}$  mit  $\tilde{e} \in R$  invertierbar. Für dieses  $\varphi$  ist dann

$$\varphi(f) = \varphi(g^n h) = y^n e, \quad \text{mit } e \in R \text{ invertierbar.}$$

Damit ist  $\text{stg}_0 f = \infty$ .

Sei umgekehrt  $\text{stg}_0 f = \infty$ . Wenn  $\text{ord}f = 0$  ist, dann ist  $0$  nach Definition ein aufgelöster Punkt von  $f$ . Sei also  $\text{ord}f \geq 1$ . Sei

$$f = cf_1^{b_1} \cdots f_r^{b_r}$$

die Primfaktorzerlegung von  $f$ . Angenommen es gibt  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $i \neq j$ , mit  $\text{ord} f_i \geq 1$  und  $\text{ord} f_j \geq 1$ . Dann können wir  $f$  schreiben als  $f = \tilde{f}_i \tilde{f}_j h$  mit  $\tilde{f}_i, \tilde{f}_j \in k[y, z]$  teilerfremd,  $\tilde{f}_i, \tilde{f}_j \in \mathfrak{m}$  und  $h \in k[y, z]$  mit  $\text{ord} h = 0$ . Mit Lemma 5.1 ist dann aber  $\text{stg}_0 f = \text{stg}_0(\tilde{f}_i \tilde{f}_j) = \infty$ . Das ist ein Widerspruch zu Lemma 7.5. Also gibt es genau ein  $i \in \{1, \dots, r\}$  mit  $\text{ord} f_i \geq 1$ . Angenommen es gilt  $\text{ord} f_i > 1$ . Nach Voraussetzung und Lemma 5.1 gilt  $\text{stg}_0 f = \text{stg}_0 f_i^{b_i} = \infty$ . Nach Lemma 7.4 und Lemma 7.3 ist aber  $\text{stg}_0 f_i^{b_i} < \infty$ . Widerspruch. Also ist  $\text{ord} f_i = 1$  und damit 0 ein aufgelöster Punkt von  $f$ .  $\square$

## 8. EXPLOSION EINES PUNKTES

Wir erklären zunächst, was wir unter der Explosion des Nullpunktes im  $\mathbf{A}^2$  verstehen. Durch eine Translation ist dann die Explosion eines beliebigen Punktes definiert.

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bezeichne  $k[y, z]$  den affinen Koordinatenring von  $\mathbf{A}^2$  und  $(a, b) \in k^2$  die Punkte von  $\mathbf{A}^2$ . Wir betrachten zwei weitere affine Räume  $U_1 = \mathbf{A}^2$  bzw.  $U_2 = \mathbf{A}^2$ . Seien

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1: U_1 &\rightarrow \mathbf{A}^2, (a, b) \mapsto (ab, b), \\ \bar{\pi}_2: U_2 &\rightarrow \mathbf{A}^2, (a, b) \mapsto (a, ab). \end{aligned}$$

Die zu  $\bar{\pi}_1$  bzw.  $\bar{\pi}_2$  gehörigen Abbildungen  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  auf  $k[y, z]$  sind dann

$$\begin{aligned} \pi_1: k[y, z] &\rightarrow k[y, z], f(y, z) \mapsto f(yz, z), \\ \pi_2: k[y, z] &\rightarrow k[y, z], f(y, z) \mapsto f(y, yz). \end{aligned}$$

Wir definieren die offenen Mengen

$$\begin{aligned} U_{12} &= \{(a, b) \in U_1 \text{ mit } a \neq 0\} = U_1 \setminus V(y), \\ U_{21} &= \{(a, b) \in U_2 \text{ mit } b \neq 0\} = U_2 \setminus V(z). \end{aligned}$$

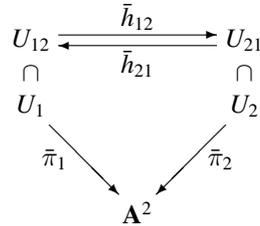
und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \bar{h}_{12}: U_{12} &\rightarrow U_{21}, (a, b) \mapsto (ab, 1/a), \\ \bar{h}_{21}: U_{21} &\rightarrow U_{12}, (a, b) \mapsto (1/b, ab). \end{aligned}$$

Dann ist

$$(8.1) \quad \bar{h}_{12} \bar{h}_{21} = \text{Id} \text{ und } \bar{h}_{21} \bar{h}_{12} = \text{Id},$$

und wir haben folgendes kommutatives Diagramm:



Bezeichne  $T = U_1 \sqcup U_2$  die topologische Summe von  $U_1$  und  $U_2$ . Das heißt  $T$  ist als Menge die disjunkte Vereinigung der beiden Mengen  $U_1$  und  $U_2$  und eine Teilmenge von  $T$  ist offen genau dann, wenn ihr Durchschnitt mit  $U_1$  bzw.  $U_2$  offen ist. Wir setzen  $U_{11} = U_1$  bzw.  $U_{22} = U_2$  und

$$(8.2) \quad \bar{h}_{11} = \text{Id}: U_{11} \rightarrow U_{11} \text{ bzw. } \bar{h}_{22} = \text{Id}: U_{22} \rightarrow U_{22}.$$

Damit können wir eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $T$  definieren. Wir sagen  $t$  und  $u$  aus  $T$  sind äquivalent, wenn  $t \in U_{ij}$ ,  $u \in U_{ji}$  und  $u = \bar{h}_{ij}(t)$  für ein  $i$  bzw. ein  $j$  aus  $\{1, 2\}$ . Mit (8.1) und (8.2) erkennt man, daß  $\sim$  tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

Wir schreiben nun  $W' = T / \sim$  für den Quotientenraum (d.h., die Menge der Äquivalenzklassen versehen mit der Quotiententopologie) und  $p: T \rightarrow W'$  für die kanonische Abbildung. Dann ist  $W'$  eine reguläre Varietät, die, wie man sagt, durch das Zusammenkleben von  $U_1$  und  $U_2$  entsteht. Wir nennen  $W'$  die *Explosion des Nullpunktes* von  $\mathbf{A}^2$ . Über die kanonische Abbildung können wir  $U_1$  bzw.  $U_2$  mit den in  $W'$  offenen Mengen  $p(U_1)$  bzw.  $p(U_2)$  identifizieren. Es ist  $W' = p(U_1) \cup p(U_2)$ .

Die Abbildung  $\bar{\pi}: W' \rightarrow \mathbf{A}^2$  mit

$$\bar{\pi}(w) = \begin{cases} \bar{\pi}_1(w), & \text{wenn } w \in U_1, \\ \bar{\pi}_2(w), & \text{wenn } w \in U_2, \end{cases}$$

ist wohldefiniert, da das obige Diagramm kommutativ ist.

LEMMA 8.1. Für  $\bar{\pi}: W' \rightarrow \mathbf{A}^2$  und  $E = \bar{\pi}^{-1}(0)$  gilt:

- (i)  $E \cap U_1 = V(z)$  bzw.  $E \cap U_2 = V(y)$ .
- (ii)  $E \simeq \mathbf{P}^1$ .
- (iii)  $\bar{\pi}: W' \setminus E \rightarrow \mathbf{A}^2 \setminus \{0\}$  ist ein Isomorphismus.

*Beweis.* Die Behauptung (i) ist klar nach Definition von  $\bar{\pi}$ .

Zu (ii): Man prüft leicht nach, daß die Abbildung  $\bar{\varphi}: E \rightarrow \mathbf{P}^1$  mit

$$\bar{\varphi}(e) = \begin{cases} (a : 1), & \text{wenn } e = (a, 0) \in E \cap U_1, \\ (1 : b), & \text{wenn } e = (0, b) \in E \cap U_2, \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Zu (iii): Sei  $w \in (W' \setminus E) \cap U_1$ . Dann ist  $w = (a, b)$  mit  $b \neq 0$ . Also ist  $\bar{\pi}(w) = (ab, b) \in \mathbf{A}^2 \setminus \{0\}$ . Analog schließt man für  $w \in (W' \setminus E) \cap U_2$ . Wir definieren  $\bar{\varphi}: \mathbf{A}^2 \setminus \{0\} \rightarrow W' \setminus E$  durch

$$\bar{\varphi}(w) = \begin{cases} (a/b, b) \in U_1 \setminus E, & \text{wenn } w \in \mathbf{A}^2 \setminus V(z), \\ (a, b/a) \in U_2 \setminus E, & \text{wenn } w \in \mathbf{A}^2 \setminus V(y). \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für ein  $(a, b) \in \mathbf{A}^2 \setminus V(yz)$  ist

$$\bar{h}_{12}(a/b, b) = ((a/b)b, 1/(a/b)) = (a, b/a).$$

Weiters sind  $\bar{\varphi}\bar{\pi} = \text{Id}$  auf  $W' \setminus E$  bzw.  $\bar{\pi}\bar{\varphi} = \text{Id}$  auf  $\mathbf{A}^2 \setminus \{0\}$ .  $\square$

Wir nennen  $E$  den *exzeptionellen Divisor* von  $\bar{\pi}: W' \rightarrow \mathbf{A}^2$ .

## 9. TOTAL UND STRIKT TRANSFORMIERTE

Seien  $f \in k[y, z] \setminus k$ ,

$$f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$$

und  $0 \in C = V(f)$ , d.h.,  $r = \text{ord} f \geq 1$ . Wir überlegen uns, wie das Urbild von  $C$  unter  $\bar{\pi}$  aussieht. Dazu berechnen wir  $\bar{\pi}^{-1}(C)$  in  $U_1$  bzw.  $U_2$ . Bezeichne

$$f_1^* = f_1^*(y, z) = \pi_1(f) = f(yz, z)$$

bzw.  $f_2^* = \pi_2(f) = f(y, yz)$ . Wir führen alle folgenden Überlegungen nur für  $f_1^*$  und  $U_1$  aus und schreiben  $f^*$  für  $f_1^*$ . Für  $f_2^*$  und  $U_2$  gelten die analogen Aussagen. Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^{-1}(C) \cap U_1 &= \{a = (a_1, a_2) \in U_1 \text{ mit } \bar{\pi}_1(a) = (a_1 a_2, a_2) \in C\} \\ &= \{a \in U_1 \text{ mit } f(a_1 a_2, a_2) = 0\} = V(f^*). \end{aligned}$$

Man nennt  $\bar{\pi}^{-1}(C) \subset W'$  die *total Transformierte* von  $C$  bzw.  $f^*$  die *total Transformierte* von  $f$  in  $U_1$ . Wir können  $f^*$  zerlegen in

$$\begin{aligned} (9.1) \quad f^* &= f(yz, z) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_1 + \alpha_2} \\ &= z^r \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_1 + \alpha_2 - r} = z^r f'(y, z) = z^r f'. \end{aligned}$$

Dann ist

$$V(f^*) = V(z^r f') = V(z^r) \cup V(f') = (E \cap U_1) \cup V(f').$$

Wir nennen  $f'$  bzw.  $V(f')$  die *strikt Transformierte* von  $f$  bzw.  $V(f)$  in  $U_1$ . Um die Primfaktoren von  $f'$  zu untersuchen, überlegen wir uns zunächst, daß  $f'$  nicht durch  $z$  teilbar ist. Wir schreiben

$$f = f_r + f_{r+1} + \cdots + f_d, \quad \text{mit } d = \deg f$$

als Summe von homogenen Polynomen. Dann ist

$$\begin{aligned} f^* = f(yz, z) &= f_r(yz, z) + f_{r+1}(yz, z) + \cdots + f_d(yz, z) \\ &= z^r(f_r(y, 1) + z f_{r+1}(y, 1) + \cdots + z^{d-r} f_d(y, 1)) = z^r f' \end{aligned}$$

mit  $f_r(y, 1) \neq 0$ , also teilt  $z$  nicht  $f'$ . Aus dieser Darstellung der strikt Transformierten von  $f$  folgt das nächste Lemma.

LEMMA 9.1. *Es gilt*

$$(E \cap U_1) \cap V(f') = V(z) \cap V(f') = \{(t, 0) \text{ mit } f_r(t, 1) = 0\}.$$

*Insbesondere ist diese Menge endlich.*

LEMMA 9.2. *Sei  $f \neq cz$  mit  $c \in k \setminus 0$  und  $f$  irreduzibel bzw. reduziert. Dann ist auch  $f'$  irreduzibel bzw. reduziert.*

*Beweis.* Angenommen  $f'$  ist reduzibel, d.h.,

$$f' = gh, \quad \text{mit } g, h \in k[y, z] \setminus k.$$

Wenn wir nun  $y/z$  für  $y$  einsetzen, ist mit (9.1)

$$f = z^r g(y/z, z) h(y/z, z).$$

Indem wir diese Gleichung mit einer genügend hohen Potenz von  $z$  multiplizieren, ist

$$z^n f = z^r \tilde{g} \tilde{h}, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \tilde{g}, \tilde{h} \in k[y, z].$$

Da  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  jeweils einen Primfaktor ungleich  $z$  besitzen (sonst wäre  $f'$  durch  $z$  teilbar), folgt ein Widerspruch zur Irreduzibilität von  $f$ . Eine ähnliche Argumentation zeigt auch, daß die Reduziertheit von  $f$  die Reduziertheit von  $f'$  impliziert.  $\square$

Sei  $a' = (t, 0) \in E \cap U_1$ . Uns interessiert die Invariante  $\text{inv}_{a'} f'$  von  $f'$  im Punkt  $a'$ . Nach Definition ist

$$\text{inv}_{a'} f' = \text{inv}_0 f'(y+t, z) = \text{inv}_0 v(f')$$

mit

$$v: k[y, z] \rightarrow k[y, z]$$

dem zu  $\bar{v} = (y+t, z)$  gehörigen Einsetzungshomomorphismus ( $v$  ist nur auf dem Polynomring definiert!). Wir verwenden im nächsten Abschnitt dazu folgende Überlegung. Sei

$$w: k[y, z] \rightarrow k[y, z], \quad \text{mit } \bar{w} = (y+tz, z).$$

LEMMA 9.3. *In dieser Situation ist*

$$\begin{array}{ccc} k[y, z] & \xrightarrow{v} & k[y, z] \\ \pi_1 \uparrow & & \uparrow \pi_1 \\ k[y, z] & \xrightarrow{w} & k[y, z] \end{array}$$

*kommutativ, und es gilt*

$$f'(y+t, z) = v(f') = w(f') = f(y+tz, z)'$$

(vgl. Lemma 10.7).

*Beweis.* Das obige Diagramm kommutiert, denn

$$v\pi_1(y) = v(yz) = yz + tz = \pi_1(y+tz) = \pi_1 w(y)$$

und

$$v\pi_1(z) = z = \pi_1 w(z).$$

Aus der Kommutativität (und da  $\text{ord } w(f) = r$ ) folgt dann

$$z^r v(f') = v(z^r f') = v\pi_1(f) = \pi_1 w(f) = z^r w(f)'$$

□

## 10. DIE INVARIANTE FÄLLT UNTER EXPLOSION

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die Auflösungsinvariante einer Kurve unter Explosion fällt.

SATZ 10.1. Seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $f \in k[y, z] \setminus k$  und  $a \in \mathbf{A}^2$  ein nicht aufgelöster Punkt von  $f$ . Wir betrachten die Explosion des Punktes  $a \in \mathbf{A}^2$ . Dann ist die Invariante der strikt transformierten  $f'$  von  $f$  in jedem Punkt  $a'$  des exzeptionellen Divisors kleiner als die Invariante von  $f$  im Punkt  $a$ ,

$$\text{inv}_{a'} f' < \text{inv}_a f, \quad \text{für } a' \in E.$$

Nach einer Translation in  $\mathbf{A}^2$  können wir annehmen, daß  $a$  der Nullpunkt ist. Sei

$$a' = (t, 0) \in E \cap U_1.$$

Bezeichne  $l_t$  den zu  $\bar{l}_t = (y + tz, z)$  gehörigen Substitutionshomomorphismus. Dann ist mit Lemma 9.3

$$(10.1) \quad \text{inv}_{a'} f' = \text{inv}_0 l_t(f)' = (\text{ord}_0 l_t(f)', \text{stg}_0 l_t(f)').$$

Wir können also, um die Invariante von  $f'$  in jedem Punkt von  $E \cap U_1$  zu untersuchen, auch  $\text{ord}_0 l_t(f)'$  bzw.  $\text{stg}_0 l_t(f)'$  für  $t \in k$  betrachten. Wir werden dies im folgenden gleich für beliebige Potenzreihen tun. Um die Invariante in jedem Punkt des exzeptionellen Divisors zu kennen, müssen wir auch  $\text{inv}_0 f'_2$  in  $U_2$  untersuchen.

Wir verallgemeinern in diesem Abschnitt unter anderem den Begriff der total und strikt transformierten für Potenzreihen und verwenden wieder folgende Bezeichnungen. Sei  $R$  ein Potenzreihenring in zwei Variablen über einem Körper  $k$  und  $\mathbf{y} = (y, z)$  ein reguläres Parametersystem von  $R$ . Sei  $f \in R$  mit  $f \neq 0$ ,  $r = \text{ord} f \geq 1$  und

$$(10.2) \quad f = f(y, z) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}.$$

Sei weiters  $\pi_1: R \rightarrow R$  bzw.  $\pi_2: R \rightarrow R$  die zu  $\bar{\pi}_1 = (yz, z)$  bzw.  $\bar{\pi}_2 = (y, yz)$  gehörigen Substitutionshomomorphismen. Bezeichne

$$\begin{aligned} f^* = \pi_1(f) = f(yz, z) &= \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_1 + \alpha_2} \\ &= z^r \sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_1 + \alpha_2 - r} = z^r f'(y, z) = z^r f' \end{aligned}$$

und

$$f_2^* = \pi_2(f) = f(y, yz) = y^r f'_2.$$

LEMMA 10.2. Es gilt:

- (i)  $\Delta_{\mathbf{y}}(f') = \{(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 - r) \text{ mit } (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta_{\mathbf{y}}(f)\}$ .

(ii)  $\text{ord}f' \leq \text{ord}f = r$ .

*Beweis.* Zu (ii): Sei  $\alpha \in \Delta_{\mathbf{y}}(f)$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = r$ , dann ist

$$\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 - r) \leq r.$$

Also ist  $\text{ord}f' \leq r$ .  $\square$

LEMMA 10.3. Sei  $\text{stg}f = \text{ord}f = r$ . Dann sind

$$\text{ord}l_t(f)' < \text{ord}f, \quad \text{für } t \in k$$

und  $\text{ord}f_2' < \text{ord}f$ .

*Beweis.* Für jedes  $t \in k$  gibt es ein  $\alpha \in \Delta_{\mathbf{y}}(l_t(f))$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = r$  und  $\alpha \neq (r, 0)$  (sonst wäre  $\text{stg}f \geq \text{stg}_{\mathbf{y}}l_t(f) > r$ ). Für dieses  $\alpha$  ist dann  $\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 - r) = \alpha_1 < r$ . Also folgt, da  $(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 - r) \in \Delta_{\mathbf{y}}(f')$ , die Behauptung.

Außerdem gibt es einen Term  $c_{\alpha}y^{\alpha_1}z^{\alpha_2}$  von  $f$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = r$  und  $\alpha \neq (0, r)$  (sonst wäre  $\text{stg}f \geq \text{stg}_{\mathbf{y}}p(f) > r$  mit  $p$  der Vertauschung von  $y$  und  $z$ ), und damit ist auch  $\text{ord}f_2' < r$ .  $\square$

LEMMA 10.4. Seien  $\text{stg}f > \text{ord}f = r$  und  $\mathbf{y} = (y, z)$  ein reguläres Parametersystem von  $R$  so, daß  $\text{stg}_{\mathbf{y}}f > r$ . Dann sind

$$\text{ord}l_t(f)' = 0, \quad \text{für } t \in k, t \neq 0,$$

und  $\text{ord}f_2' = 0$ .

*Beweis.* Wie im Beweis zu Lemma 4.5 erkennt man, daß in  $l_t(f)$  der Koeffizient von  $z^r$  nicht Null ist. Also ist  $\text{ord}l_t(f)' = 0$ . Da  $f_r = cy^r$ ,  $c \neq 0$ , ist auch  $\text{ord}(f_2') = 0$ .  $\square$

LEMMA 10.5.  $\text{ord}f' < \text{ord}f = r$  genau dann, wenn  $\text{stg}_{\mathbf{y}}f < 2\text{ord}f$ .

*Beweis.* Angenommen  $s = \text{stg}_{\mathbf{y}}f \geq 2r$ . Sei  $\alpha \in \Delta_{\mathbf{y}}(f)$ . Dann ist

$$\frac{s}{r}\alpha_1 + \alpha_2 \geq s$$

und damit

$$2\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2r \text{ bzw. } \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 - r) \geq r.$$

Also folgt mit Lemma 10.2, daß  $\text{ord}f' \geq r$ . Wenn  $\text{stg}_{\mathbf{y}}f < 2r$ , dann gibt es ein  $\alpha \in \text{NP}_{\mathbf{y}}(f)$ ,  $\alpha \neq (r, 0)$ , mit

$$\frac{r\alpha_2}{r - \alpha_1} < 2r.$$

Für dieses  $\alpha$  ist dann  $\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 - r) < r$ , also ist  $\text{ord}f' < r$ .  $\square$

Wir erinnern an eine Notation von Abschnitt 3, die wir im folgenden verwenden. Seien  $f$  wie in (10.2) und  $t \in \mathbf{R}$ ,  $t \geq r = \text{ord}f$ . Dann schreiben wir

$$F_t = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{y}^{\alpha}, \quad \text{Summe über } \alpha \text{ mit } \frac{t}{r} \alpha_1 + \alpha_2 = t \text{ bzw.}$$

$$F_{>t} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{y}^{\alpha}, \quad \text{Summe über } \alpha \text{ mit } \frac{t}{r} \alpha_1 + \alpha_2 > t.$$

LEMMA 10.6. *Sei  $\infty > \text{stg}_y f \geq 2 \text{ord}f$ . Dann ist*

$$\text{stg}_y f' = \text{stg}_y f - \text{ord}f$$

(siehe Abbildung 11).

*Beweis.* Seien  $r = \text{ord}f$ ,  $s = \text{stg}_y f$  und  $s' = s - r$ . Nach dem vorherigen Lemma und Lemma 10.2 ist  $r = \text{ord}f'$ . Wir zerlegen  $f$  in

$$f = F_s + F_{>s}.$$

Sei  $c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  ein beliebiger Term von  $F_s$  mit  $\alpha \neq (r, 0)$ . Dann ist

$$\frac{r\alpha_2}{r - \alpha_1} = s$$

und deshalb

$$\frac{r(\alpha_1 + \alpha_2 - r)}{r - \alpha_1} = \frac{r\alpha_2}{r - \alpha_1} - r = s - r = s'.$$

Also ist

$$\frac{s'}{r} \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 - r) = s'.$$

Für einen Term  $c_{\alpha} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$  von  $F_{>s}$  mit  $\alpha_1 < r$  ist

$$\frac{r\alpha_2}{r - \alpha_1} > s,$$

und damit folgt wie zuvor

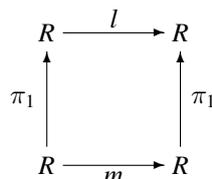
$$\frac{s'}{r} \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 - r) > s'.$$

Wenn  $\alpha_1 \geq r$  ist, dann gilt diese Ungleichung trivialerweise. Also können wir  $f'$  zerlegen in

$$f' = F'_{s'} + F'_{>s'}.$$

Mit Lemma 3.5 folgt die Behauptung.  $\square$

LEMMA 10.7. Sei  $l$  der zu  $\bar{l} = (y + g, z)$  gehörige Substitutionshomomorphismus mit  $g \in zk[[z]]$ . Sei  $m$  der zu  $\bar{m} = (y + zg, z)$  gehörige Substitutionshomomorphismus. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ,



und es gilt

$$l(f') = m(f)'$$

*Beweis.* Nachrechnen, analog zum Beweis von Lemma 9.3. □

LEMMA 10.8. Seien  $\infty > \text{stg} f \geq 2 \text{ord} f$  und  $\mathbf{y} = (y, z)$  ein reguläres Parametersystem von  $R$  so, daß  $\text{stg}_{\mathbf{y}} f = \text{stg} f$ . Dann wird  $\text{stg} f'$  durch  $\mathbf{y} = (y, z)$  realisiert, d.h.,

$$\text{stg} f' = \text{stg}_{\mathbf{y}} f'$$

*Beweis.* Angenommen  $\text{stg} f' > \text{stg}_{\mathbf{y}} f' = s'$ . Dann gibt es ein  $l \in L'$  und ein  $p \in P'$  mit  $\text{stg}_{\mathbf{y}} lp(f') > s'$ . Wenn  $s' > r = \text{ord} f$ , dann ist  $p$  die Identität. Wenn  $s' = r$  und  $p$  die Vertauschung von  $y$  und  $z$  ist, dann folgt, da  $f'$   $y$ -allgemein der Ordnung  $r$  ist, mit Satz 4.8, daß

$$p(f') = c(y + dz)^r + F_{>r}, \quad \text{mit } c, d \in k, c, d \neq 0.$$

Also ist

$$f' = cd^r(y + d^{-1}z)^r + \tilde{F}_{>r}.$$

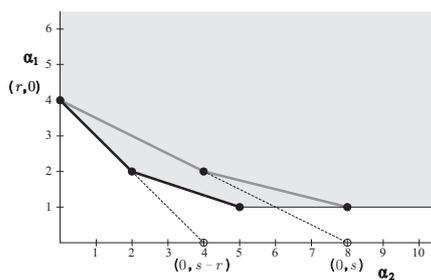


ABBILDUNG 11

Die Steigung fällt:  $\text{stg}_{\mathbf{y}} f' = \text{stg}_{\mathbf{y}} f - \text{ord} f$

Wir können daher annehmen, daß  $p$  die Identität ist. Mit  $m$  wie im vorherigen Lemma folgt

$$l(f') = m(f)'$$

Dann ist  $\text{stg}_y m(f) \geq 2r$ . Sonst wäre nach Lemma 10.5

$$\text{ord}(f') = \text{ord } l(f') = \text{ord } m(f)' < r.$$

Mit Lemma 10.6 folgt dann

$$\text{stg } f - r = s' < \text{stg}_y l(f') = \text{stg}_y m(f)' = \text{stg}_y m(f) - r \leq \text{stg } f - r,$$

also ein Widerspruch.  $\square$

**SATZ 10.9.** Seien  $f \in R$ ,  $f \neq 0$ ,  $r = \text{ord } f \geq 1$ . Sei  $\infty > \text{stg } f \geq 2 \text{ord } f$ . Dann ist

$$\text{stg } f' = \text{stg } f - \text{ord } f.$$

*Beweis.* Klar nach dem vorherigen Lemma und Lemma 10.6.  $\square$

Wir wenden die Ergebnisse dieses Abschnitts auf ebene Kurven an und beweisen den Satz vom Beginn dieses Abschnitts.

*Beweis von Satz 10.1.* Seien also  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $f \in k[y, z] \setminus k$ ,  $r = \text{ord}_0 f \geq 1$  und  $0$  ein nicht aufgelöster Punkt von  $f$ .

Wenn  $\text{stg}_0 f = \text{ord}_0 f$  ist, dann ist mit (10.1) und Lemma 10.3

$$\text{inv}_{a'} f' < \text{inv}_0 f, \quad \text{für } a' \in E \cap U_1.$$

Weiters gilt  $\text{inv}_0 f_2' < \text{inv}_0 f$ .

Sei nun  $\text{stg}_0 f > \text{ord}_0 f$ . Da nach Annahme der Nullpunkt ein nicht aufgelöster Punkt ist, folgt  $\text{stg}_0 f < \infty$  mit Satz 7.6. Daher können wir mit Satz 5.5 annehmen, daß nach einem polynomialen Koordinatenwechsel  $\text{stg}_0 f = \text{stg}_y f$  gilt. Lemma 10.4 zeigt, daß es genügt,  $\text{inv}_0 f'$  und  $\text{inv}_0 f$  zu vergleichen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) Wenn  $\text{stg}_0 f < 2 \text{ord}_0 f$  ist, dann ist nach Lemma 10.5  $\text{ord } f' < \text{ord } f$  und damit  $\text{inv}_0 f' < \text{inv}_0 f$ .
- (2) Wenn  $\text{stg}_0 f \geq 2 \text{ord}_0 f$ . Dann ist  $\text{ord } f' = \text{ord } f$  und mit dem vorherigen Satz  $\text{stg}_0 f' = \text{stg}_0 f - \text{ord}_0 f < \text{stg}_0 f$ . Es gilt wieder  $\text{inv}_0 f' < \text{inv}_0 f$ .

Also haben wir auch für den Fall  $\text{stg}_0 f > \text{ord}_0 f$  gezeigt, daß

$$\text{inv}_{a'} f' < \text{inv}_0 f, \quad \text{für } a' \in E$$

gilt.  $\square$

## 11. BEWEIS DES HAUPTSATZES

Zum Abschluß zeigen wir, wie mit den bisherigen Ergebnissen bewiesen werden kann, daß durch eine endliche Folge von Explosionen von Punkten die singulären (bzw. nicht aufgelösten) Punkte einer ebenen algebraischen Kurve aufgelöst werden können.

Seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f \in k[y, z] \setminus k$ . Nach Satz 7.1 gibt es nur endlich viele nicht aufgelöste Punkte von  $f$ . Sei  $a$  ein nicht aufgelöster Punkt von  $f$ . Wir explodieren den Punkt  $a$  in  $\mathbf{A}^2$ . Lemma 9.1 besagt, daß in nur endlich vielen Punkten des exzeptionellen Divisors die Ordnung der strikt Transformierten von  $f$  größer als Null ist. Sei  $a' \in E$  ein solcher Punkt. Wenn  $a'$  ein aufgelöster Punkt der strikt Transformierten ist, dann sind wir fertig. Sonst ist nach Satz 10.1 die Invariante der strikt Transformierten in  $a'$  kleiner als die Invariante von  $f$  im Nullpunkt. Durch Induktion über die Invariante (vgl. Abschnitt 6) folgt die Behauptung.  $\square$

A. APPENDIX

A.1 POTENZREIHENRINGE

Wir stellen einige Definitionen und Resultate über Polynome und formale Potenzreihen zusammen, die im Hauptteil der Arbeit verwendet werden. Beweise und weitere Details finden sich beispielsweise in [AM], [La], [Ru], [SS] oder [ZS].

Im folgenden bezeichnen  $k[x]$  bzw.  $k[[x]]$  den Polynomring bzw. formalen Potenzreihenring in  $n$  Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  über einem gegebenen Körper  $k$ . Wir fassen  $k[x]$  als Unterring von  $k[[x]]$  auf. Für  $f \in k[[x]]$  ungleich 0 sei  $\text{ord} f$  die Ordnung (der Untergrad) von  $f$  im Nullpunkt. Wir setzen  $\text{ord} 0 = \infty$ .

Der Potenzreihenring  $k[[x]]$  ist ein faktorieller, noetherscher, lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} = \{f \in k[[x]] \text{ mit } \text{ord} f \geq 1\}.$$

Die davon induzierte  $\mathfrak{m}$ -adische Topologie auf  $k[[x]]$  wird durch die Nullumgebungsbasis  $\mathfrak{m}^r = \{f \in k[[x]], \text{ord} f \geq r\}$  definiert. Damit wird  $k[[x]]$  eine vollständige, topologische  $k$ -Algebra.

Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz läßt sich jedes  $g \in k[[x]]$  mit  $\text{ord} g(0, \dots, 0, x_n) = m < \infty$  (d.h.,  $g$  ist  $x_n$ -allgemein der Ordnung  $m$ ) eindeutig schreiben als  $g = up$  mit  $p \in k[[x_1, \dots, x_{n-1}]][[x_n]]$  polynomial und normiert in  $x_n$  vom Grad  $m$  und  $u \in k[[x]]$  invertierbar, also  $u(0) \neq 0$ .

Jeder  $k$ -Algebrenautomorphismus  $\varphi$  von  $k[[x]]$  stabilisiert das maximale Ideal  $\mathfrak{m}$  und ist ein Substitutionshomomorphismus

$$f \mapsto f \circ \bar{\varphi} = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad \text{mit } \varphi_j = \varphi(x_j) \in \mathfrak{m},$$

wobei der Vektor  $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  eine invertierbare Funktionalmatrix  $(\partial_i \varphi_j(0)) \in \text{GL}_n(k)$  hat. Wir nennen  $\varphi$  den zu  $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  gehörigen Substitutionshomomorphismus. Mit  $d\varphi$  bezeichnen wir den durch

$$d\varphi(x_j) = \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi_j(0) x_i, \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

definierten linearen Substitutionshomomorphismus.

Sei  $\varphi$  ein  $k$ -Algebrenautomorphismus von  $k[[x]]$  mit  $d\varphi = \text{Id}$ . Dann können wir den zu  $\varphi$  inversen Substitutionshomomorphismus  $\psi$  wie folgt konstruieren. Wir schreiben  $\varphi_j = x_j + h_j$  mit  $\text{ord} h_j \geq 2$  für  $j = 1, \dots, n$ . Wir möchten  $g_j$  mit  $\text{ord} g_j \geq 2$  finden so, daß für  $\psi$  mit  $\psi_j = x_j + g_j$  gilt

$$\begin{aligned} x_j &= (\psi \circ \varphi)(x_j) = \psi(x_j + h_j) = x_j + g_j + \psi(h_j) \\ &= x_j + g_j + h_j(x_1 + g_1, \dots, x_n + g_n), \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Seien  $g = (g_1, \dots, g_n)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_n)$  und  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Dann lautet die obige Gleichung

$$x = x + g + h(x + g), \quad \text{mit } h(x + g) = (h_1(x + g), \dots, h_n(x + g)).$$

Anders ausgedrückt muß also  $g$  ein Fixpunkt der stetigen Abbildung

$$F: \mathfrak{m}^2 \cdot k[[x]]^n \rightarrow \mathfrak{m}^2 \cdot k[[x]]^n, \quad g \mapsto -h(x + g)$$

sein. Wir definieren rekursiv die Folge  $(g^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  in  $\mathfrak{m}^2 \cdot k[[x]]^n$  durch

$$g^0 = 0 \quad \text{und} \quad g^{i+1} = F(g^i) = -h(x + g^i).$$

Die Folge  $(g^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  konvergiert und mit  $g = \lim g^i \in \mathfrak{m}^2 \cdot k[[x]]^n$  gilt dann

$$-h(x + g) = F(g) = F(\lim g^i) = \lim F(g^i) = \lim g^{i+1} = g.$$

Also ist  $g$  der gesuchte Fixpunkt.

Wir untersuchen im folgenden, wann zwei teilerfremde Polynome auch als Potenzreihen teilerfremd sind. Dazu betrachten wir zunächst die Lokalisierung  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  des Polynomrings  $k[x]$  im (maximalen) Ideal  $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ . Die Lokalisierung  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  ist ein lokaler, noetherscher, faktorieller Ring. Das maximale Ideal von  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{m}$ . Wir fassen  $k[x]$  als Unterring von  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  auf, indem wir  $f$  mit  $f/1$  identifizieren.

Die Elemente aus  $k[x] \setminus \mathfrak{m}$  haben Ordnung Null und sind deshalb als Potenzreihen invertierbar. Wir können daher den Ring  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  in den Potenzreihenring  $k[[x]]$  durch die wohldefinierte und injektive Abbildung

$$k[x]_{\mathfrak{m}} \rightarrow k[[x]], \quad \frac{f}{g} \mapsto fg^{-1}$$

einbetten. Also haben wir folgende Inklusion von Ringen

$$k[x] \subset k[x]_{\mathfrak{m}} \subset k[[x]].$$

Sei  $\mathfrak{c} \subset k[x]_{\mathfrak{m}}$  ein Ideal. Mit  $\widehat{\mathfrak{c}} = k[[x]]\mathfrak{c}$  bezeichnen wir die Erweiterung des Ideals  $\mathfrak{c}$  in  $k[[x]]$ . Für das maximale Ideal  $\mathfrak{m} \subset k[x]_{\mathfrak{m}}$  ist  $\widehat{\mathfrak{m}}$  das maximale Ideal von  $k[[x]]$ . Weiters gilt

$$\widehat{\mathfrak{m}}^r \cap k[x]_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^r, \quad \text{für } r \in \mathbb{N}.$$

Der nächste Satz gibt Auskunft über die Beziehungen zwischen beliebigen Idealen  $\mathfrak{c}$  von  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  und deren Erweiterung  $\widehat{\mathfrak{c}}$  in  $k[[x]]$  und Kontraktion  $\widehat{\mathfrak{c}} \cap k[x]_{\mathfrak{m}}$  in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$ . Für den Beweis brauchen wir folgende Behauptung, siehe zum Beispiel [Sh, Vol. 1, S. 284].

LEMMA A.1. *Seien  $A$  ein noetherscher Ring,  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal so, daß jedes Element von  $1 + \mathfrak{a}$  invertierbar ist. Dann ist  $\bigcap_{r>0} (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^r) = \mathfrak{b}$  für jedes Ideal  $\mathfrak{b} \subset A$ .*

SATZ A.2. *Sei  $\mathfrak{c} \subset k[x]_{\mathfrak{m}}$  ein Ideal. Dann ist  $\widehat{\mathfrak{c}} \cap k[x]_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{c}$ .*

*Beweis.* Es genügt die Inklusion  $\widehat{\mathfrak{c}} \cap k[x]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{c}$  zu zeigen. Sei  $\mathfrak{c} = (c_1, \dots, c_m)$  ein Erzeugendensystem von  $\mathfrak{c}$ . Sei  $c \in \widehat{\mathfrak{c}} \cap k[x]_{\mathfrak{m}}$ . Dann ist  $c = \sum c_i \gamma_i$  mit  $\gamma_i \in k[[x]]$ . Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Wir können  $\gamma_i$  schreiben als

$$\gamma_i = d_i + \delta_i, \quad \text{mit } d_i \in k[x] \subset k[x]_{\mathfrak{m}} \quad \text{und} \quad \delta_i \in \widehat{\mathfrak{m}}^r.$$

Mit  $d = \sum c_i d_i \in \mathfrak{c}$  ist dann

$$c - d \in \widehat{\mathfrak{m}}^r \cap k[x]_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^r.$$

Also ist

$$c \in \bigcap_{r>0} (\mathfrak{c} + \mathfrak{m}^r) = \mathfrak{c},$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus dem vorherigen Lemma folgt, zusammen mit der Tatsache, daß in einem lokalen Ring jedes Element von  $1 + \mathfrak{m}$  invertierbar ist.  $\square$

KOROLLAR A.3. *Seien  $c, d \in k[x]_{\mathfrak{m}}$ . Aus  $c \mid d$  in  $k[[x]]$  folgt  $c \mid d$  in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$ .*

*Beweis.* Aus  $c \mid d$  in  $k[[x]]$  folgt mit dem vorherigen Satz

$$d \in (\widehat{\mathfrak{c}}) \cap k[x]_{\mathfrak{m}} = (c).$$

Also  $c \mid d$  in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$ .  $\square$

SATZ A.4. *Seien  $c, d \in k[x]_{\mathfrak{m}}$ . Wenn  $c$  und  $d$  teilerfremd in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  sind, dann sind sie auch teilerfremd in  $k[[x]]$ .*

*Beweis.* Angenommen,  $c$  und  $d$  sind nicht teilerfremd in  $k[[x]]$ . Sei  $\alpha$  ein größter gemeinsamer Teiler von  $c$  und  $d$  in  $k[[x]]$  ( $\alpha$  ist nach Annahme ein echter Teiler von  $c$  bzw.  $d$ ). Dann können wir  $c$  und  $d$  schreiben als  $c = \alpha \gamma$  und  $d = \alpha \delta$  mit  $\gamma, \delta \in k[[x]]$  teilerfremd. Also ist  $c\delta - d\gamma = 0$ . Für  $r \in \mathbf{N}$  zerlegen wir  $\gamma$  und  $\delta$  in  $\gamma = s_r + \sigma_r$  und  $\delta = t_r + \tau_r$  mit  $s_r, t_r \in k[x] \subset k[x]_{\mathfrak{m}}$  und  $\sigma_r, \tau_r \in \widehat{\mathfrak{m}}^r$ . Dann ist

$$ct_r - ds_r \in (\widehat{(c, d)\mathfrak{m}})^r \cap k[x]_{\mathfrak{m}} = (c, d)\mathfrak{m}^r,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen mit Satz A.2 folgt. Daher gibt es  $u_r, v_r \in \mathfrak{m}^r$  so, daß  $ct_r - ds_r = cv_r + du_r$ . Also ist

$$c(t_r - v_r) = d(s_r + u_r),$$

und damit (kürzen)

$$\gamma(t_r - v_r) = \delta(s_r + u_r).$$

Da  $\gamma$  und  $\delta$  teilerfremd in  $k[[x]]$  sind, ist  $(s_r + u_r)$  durch  $\gamma$  in  $k[[x]]$  teilbar, d.h.,

$$(s_r + u_r) = \lambda\gamma, \quad \text{mit } \lambda \in k[[x]].$$

Sei  $r = \text{ord } \gamma + 1$ . Dann ist

$$\text{ord}(s_r + u_r) = \text{ord}(s_r) = \text{ord}(s_r + \sigma_r) = \text{ord}(\gamma),$$

weil  $\gamma = s_r + \sigma_r$  und  $u_r \in \mathfrak{m}^r$ ,  $\sigma_r \in \widehat{\mathfrak{m}}^r$ . Also ist  $\text{ord } \lambda = 0$ , d.h.,  $\lambda$  ist invertierbar. Daher  $(s_r + u_r) \mid \gamma$  in  $k[[x]]$ . Da  $\gamma$  ein Teiler von  $c$  in  $k[[x]]$  ist, folgt daraus mit Korollar A.3, daß  $(s_r + u_r) \mid c$  in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$ , d.h.,

$$c = e(s_r + u_r), \quad \text{mit } e \in k[x]_{\mathfrak{m}}.$$

Aber  $c(t_r - v_r) = d(s_r + u_r)$ , und deshalb ist (kürzen)  $e(t_r - v_r) = d$ . Weil  $c$  und  $d$  teilerfremd in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  sind, ist  $e$  invertierbar in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$ . Damit ist

$$(c) = (s_r + u_r) = (\gamma) \quad \text{in } k[[x]].$$

Dann kann aber  $\alpha$  kein echter Teiler von  $\gamma$  in  $k[[x]]$  sein. Widerspruch.  $\square$

**KOROLLAR A.5.** *Seien  $f, g \in k[x]$  und  $f, g \in \mathfrak{m}$ . Wenn  $f$  und  $g$  teilerfremd in  $k[x]$  sind, dann sind sie auch teilerfremd in  $k[[x]]$ .*

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus dem vorherigen Satz und der Tatsache, daß zwei teilerfremde Polynome  $f, g \in \mathfrak{m}$  auch in  $k[x]_{\mathfrak{m}}$  teilerfremd sind.

## A.2 GAUSS-BRUHAT ZERLEGUNG

Sei  $k$  ein Körper. Bezeichne im folgenden  $R$  den formalen Potenzreihenring in zwei Variablen über  $k$  und  $G = \mathbf{Aut}_k(R)$  die Gruppe der  $k$ -Algebrenautomorphismen. Eine Matrix  $A \in \text{GL}_n(k)$  kann man bekanntlich zerlegen in  $A = PLU$  mit  $U$  eine obere (upper) Dreiecksmatrix,  $L$  eine untere (lower) Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonale und  $P$  einer Permutationsmatrix (Gaußalgorithmus mit elementaren Zeilenoperationen und Zeilenvertauschungen). Wir möchten nun analog dazu ein  $\varphi \in G$  schreiben

als  $\varphi = plu$ . Dabei sollen  $l$  und  $u$  aus geeigneten Untergruppen von  $G$  und  $p$  eine eventuelle Vertauschung der Variablen sein.

Sei  $\mathbf{y} = (y, z)$  ein reguläres Parametersystem von  $R$ . Wir identifizieren wieder ein  $\varphi \in G$  mit dem zu

$$\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2), \quad \text{mit } \varphi_1(y, z) = \varphi(y), \varphi_2(y, z) = \varphi(z),$$

gehörigen Substitutionshomomorphismus. Das Einselement von  $G$  bezeichnen wir mit  $\text{Id}$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} L &= \{\varphi \in G \text{ mit } \varphi_1 - y \in zk[[z]] \text{ und } \varphi_2 = z\}, \\ U &= \{\varphi \in G \text{ mit } \varphi_1 - y \in yR\}, \\ P &= \{\text{Id}, p\}, \quad \text{mit } \bar{p} = (z, y). \end{aligned}$$

Diese Definition hängt natürlich von der Wahl des regulären Parametersystems ab. Wir werden im folgenden zeigen, daß  $L$  bzw.  $U$  Untergruppen von  $G$  sind ( $P$  ist offensichtlich eine). Durch Nachrechnen sieht man, daß  $L$  und  $U$  bezüglich Komposition abgeschlossen sind. Weiters ist für  $l \in L$  bzw.  $u \in U$  die zu  $dl$  bzw.  $du$  gehörige Matrix eine unipotente untere Dreiecksmatrix bzw. eine obere Dreiecksmatrix. Der durch  $dl$  induzierte lineare Substitutionshomomorphismus bildet also  $y$  auf  $y + az$  mit  $a \in k$  und  $z$  auf  $z$  ab. Damit ist er wieder in  $L$ . Analog dazu ist auch der von  $du$  induzierte Substitutionshomomorphismus wieder in  $U$ .

Seien  $l \in L$  mit  $\bar{l} = (y + g(z), z)$  und  $m$  der zu  $\bar{m} = (y - g(z), z)$  gehörige Einsetzungshomomorphismus. Dann ist

$$lm = ml = \text{Id},$$

also  $l^{-1} = m \in L$ . Damit ist  $L$  eine Untergruppe von  $G$ . Mit folgender Behauptung ist auch  $U$  eine Untergruppe.

LEMMA A.6. *Sei  $u \in U$ . Dann ist  $u^{-1} \in U$ .*

*Beweis.* Da der von  $du$  induzierte lineare Substitutionshomomorphismus wieder in  $U$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $du = \text{Id}$ . Sei also  $\bar{u} = (y + h_1, z + h_2)$  mit  $\text{ord}(h_i) \geq 2$ ,  $i = 1, 2$ , und  $h_1 = yf(y, z)$ . Nach Abschnitt A.1 ist der zu  $u$  inverse Substitutionshomomorphismus gegeben durch  $\bar{u}^{-1} = (y + g_1, z + g_2)$ , wobei  $g = (g_1, g_2) = \lim g^i$  mit  $g^0 = 0$  und  $g^{i+1} = F(g^i)$ . Dabei ist

$$\begin{aligned} F: \mathfrak{m}^2 \cdot R^2 &\rightarrow \mathfrak{m}^2 \cdot R^2, \\ (g_1, g_2) &\mapsto -h(y + g_1, z + g_2), \quad \text{mit } h = (h_1, h_2). \end{aligned}$$

Durch Induktion über  $i$  folgt, daß  $g_1^i = yf^i(y, z)$  für  $i \geq 1$ , und damit die Behauptung. Der Fall  $i = 1$  ist klar. Sei also  $g_1^i = yf^i(y, z)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} g_1^{i+1} &= h_1(y + g_1^i, z + g_2^i) = (y + g_1^i)f(y + g_1^i, z + g_2^i) \\ &= (y + yf^i(y, z))f(y + g_1^i, z + g_2^i) = yf^{i+1}(y, z). \end{aligned}$$

□

Sei  $\varphi \in G$  mit  $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ . Wir schreiben

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= ay + bz + h_1, \\ \varphi_2 &= cy + dz + h_2, \end{aligned}$$

mit  $a, b, c, d \in k$  und  $\text{ord } h_i \geq 2$  für  $i = 1, 2$ . Die zu  $d\varphi$  gehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. Sei  $p$  die Vertauschung von  $y$  und  $z$ , d.h.,  $\bar{p} = (z, y)$ . Die zu  $d(\varphi p) = d\varphi dp$  bzw.  $d(p\varphi) = dpd\varphi$  gehörige Matrix ist die Matrix  $A$  mit vertauschten Spalten bzw. Zeilen. Da  $A$  invertierbar ist, gibt es immer ein  $p \in P$  so, daß  $(p\varphi)_1 = (p\varphi)(y) = ay + bz + h_1$  mit  $a, b \in k$ ,  $a \neq 0$  und  $\text{ord}(h_1) \geq 2$  (d.h.,  $(p\varphi)_1$  ist  $y$ -allgemein der Ordnung 1). Analog gibt es ein  $p \in P$  mit  $(\varphi p)_1 = ay + bz + h_1$  mit  $a, b, h_1$  wie zuvor.

Für eine allgemeinere Version des folgenden Satzes in beliebiger Dimension siehe [Ha6].

**SATZ A.7.** *Mit den Bezeichnungen wie oben gilt*

$$G = PLU = ULP = PUL = LUP.$$

*Beweis.* Sei  $\varphi \in G$ . Wir zeigen zunächst  $G = PLU$ . Sei  $p \in P$  so, daß  $(p\varphi)_1$   $y$ -allgemein der Ordnung 1 ist. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz gibt es dann ein  $g \in zk[[z]]$  und eine Einheit  $e \in R$  so, daß

$$(p\varphi)_1 = (p\varphi)(y) = (y + g)e.$$

Sei  $l$  der zu  $\bar{l} = (y + g, z)$  gehörige Substitutionshomomorphismus. Dann ist  $l \in L$  und

$$\begin{aligned} (l^{-1}p\varphi)(y) &= l^{-1}((y + g(z))e(y, z)) \\ &= (y - g(z) + g(z))(e(y - g(z), z)) = ye(y - g(z), z). \end{aligned}$$

Damit ist  $l^{-1}p\varphi = u \in U$  und  $\varphi = p^{-1}lu$ , also  $G = PLU$ . Durch Inversion folgt daraus  $G = ULP$ .

Sei nun  $p \in P$  so, daß  $(\varphi^{-1}p)_1$   $y$ -allgemein der Ordnung 1 ist. Wie zuvor finden wir dann ein  $l$  so, daß  $l^{-1}\varphi^{-1}p = u \in U$ . Dann ist  $\varphi^{-1} = lup^{-1}$  und damit  $\varphi = pu^{-1}l^{-1}$ , also  $G = PUL$ .  $\square$

## LITERATUR

- [Ab1] ABHYANKAR, S. Desingularization of plane curves. In: *Summer Institute on Algebraic Geometry. Arcata 1981, Proc. Symp. Pure Appl. Math. 40 Amer. Math. Soc.*
- [Ab2] — Algebraic Geometry for Scientists and Engineers. *Math. Surveys and Monographs 35. Amer. Math. Soc.* 1990.
- [Ab3] — Local uniformization of algebraic surfaces over ground fields of characteristic  $p \neq 0$ . *Ann. of Math.* 63 (1956), 491–526.
- [AM] ATIYAH, M. F. and MACDONALD I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [AHV1] AROCA, J.-M., HIRONAKA, H. and VICENTE, J.-L. The theory of the maximal contact. *Memorias Mat. Inst. Jorge Juan Madrid* 29 (1975).
- [AHV2] — Desingularization theorems. *Memorias Mat. Inst. Jorge Juan Madrid* 30 (1975).
- [BK] BRIESKORN, E. and KNÖRRER, H. *Ebene algebraische Kurven*. Birkhäuser 1981. English translation: *Plane algebraic curves*. Birkhäuser 1986.
- [BM] BIERSTONE, E. and MILMAN, P. Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant. *Invent. Math.* 128 (1997), 207–302.
- [BL] BONDIL, R. and LÊ, D. T. Résolution des singularités de surfaces par éclatements normalisés (multiplicité, multiplicité polaire, et singularités minimales). In: *Trends in Singularities* Birkhäuser 2002.
- [Du] DULAC, H. Sur les intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle. *Bull. Soc. Math. France* 36 (1908), 216–224.
- [Cp] CAMPILLO, A. Algebroid curves in positive characteristic. *Lecture Notes in Math.* 813, Springer-Verlag 1980.
- [Cs] CASAS, E. *Singularities of plane curves*. Cambridge Univ. Press 2000.
- [EH] ENCINAS, S. and HAUSER, H. Strong resolution of singularities in characteristic zero. *Comment. Math. Helv.* 77 (2002), 421–445.
- [EV] ENCINAS, S. and VILLAMAYOR, O. Good points and constructive resolution of singularities. *Acta Math.* 181 (1998), 109–158.
- [Fu] FULTON, W. *Algebraic Curves*. Benjamin 1969.
- [GT] GOLDIN, R. and TEISSIER, B. Resolving singularities of plane analytic branches with one toric morphism. In: *Resolution of Singularities, Progress in Math.* 181. Birkhäuser 2000.
- [Hs] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag 1977.

- [Ha1] HAUSER, H. Resolution of singularities 1860-1999. *In: Resolution of Singularities, Progress in Math. 181*. Birkhäuser 2000.
- [Ha2] — The Hironaka Theorem on resolution of singularities (Or: A proof that we always wanted to understand). *Bull. Amer. Math. Soc.* 40 (2003), 323–403.
- [Ha3] — Excellent surfaces and their taut resolution. *In: Resolution of Singularities, Progress in Math. 181*. Birkhäuser 2000.
- [Ha4] — Seventeen obstacles for resolution of singularities. *In: Singularities, The Brieskorn Anniversary volume, Progress in Math. 162*. Birkhäuser 1998.
- [Ha5] — Why Hironaka's proof of resolution of singularities fails in positive characteristic. *Preprint*.
- [Ha6] — Three power series techniques. *Proc. London. Math. Soc.* 89 (2004), 1–24.
- [Hi] HIRONAKA, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. *Ann. of Math.* 79 (1964), 109–326.
- [La] LANG, S. *Algebra. Revised third edition*. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Lp] LIPMAN, J. Introduction to resolution of singularities. *Proceedings Symp. Pure Appl. Math. 29 Amer. Math. Soc.* 1975, 187–230.
- [Mu] MUMFORD, D. The Red Book of Varieties and Schemes. *Lecture Notes in Math. 1358*, Springer-Verlag 1988.
- [Ok] OKA, M. Geometry of plane curves via toroidal resolution. *In: Algebraic geometry and singularities, Progress in Math. 134*. Birkhäuser 1996.
- [Or] ORBANZ, U. Embedded resolution of algebraic surfaces after Abhyankar (characteristic 0). *In: Resolution of surface singularities. Lecture Notes in Math. 1101*, Springer-Verlag 1984.
- [Ru] RUIZ, J., M. *The basic theory of power series*. Vieweg, Braunschweig, 1993.
- [SS] SCHEJA, G. and STORCH, U. *Lehrbuch der Algebra, Teil 2*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [Sg] SEGRE, B. Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche. *Ann. Mat. Pura Appl.* 33 (1952), 5–48.
- [Sh] SHAFAREVICH, I. R. *Basic Algebraic Geometry 1 und 2, Second Edition*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [Vi1] VILLAMAYOR, O. Constructiveness of Hironaka's resolution. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris* 22 (1989), 1–32.
- [Vi2] — Patching local uniformizations. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris* 25 (1992), 629–677.
- [Za] ZARISKI, O. *Algebraic Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik, vol 61, 2nd edition, Springer-Verlag 1971.

- [ZS] ZARISKI, O. and SAMUEL P. *Commutative Algebra, vol. I, II.* Van Nostrand 1958, 1960. Reprints: Graduate Texts in Mathematics 28, 29. Springer-Verlag 1975.

*(Reçu le 20 août 2003; version révisée reçue le 26 mars 2004)*

Herwig Hauser

Institut für Mathematik  
Universität Innsbruck  
A-6020 Innsbruck  
Austria  
*e-mail:* herwig.hauser@uibk.ac.at

Georg Regensburger

Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM)  
Österreichische Akademie der Wissenschaften  
Altenbergerstraße 69  
A-4040 Linz  
Austria  
*e-mail:* georg.regensburger@oeaw.ac.at