

Notebook file with all certificates for the statements in the paper

“Algebraic proof methods for identities of matrices and operators: improvements of Hartwig’s triple reverse order law”

```
(* First, define a function to check the certificates *)
(* To this end,
we define our own noncommutative multiplication with some basic properties *)
CoeffQ[_Rational] := True
CoeffQ[_Integer] := True
CoeffQ[_] := False
```

```
Prod[a___, 0, b___] = 0;
Prod[a___, Prod[b___], c___] := Prod[a, b, c]
Prod[a___, b_Plus, c___] := (Prod[a, #, c] & /@ b)
Prod[a___, c_? (CoeffQ[#] &), b___] := c Prod[a, b]
Prod[a___, (d_?CoeffQ) * b_, c___] := d Prod[a, b, c]
Prod[a___, b_List, c___] := Prod[a, Sequence@@b, c]
```

```
(* We also define an adjoint operation with some basic properties *)
adj[adj[a_]] := a
adj[NonCommutativeMultiply[a_, b_]] := NonCommutativeMultiply[adj[b], adj[a]]
adj[-a_] := -adj[a];
adj[Times[a_?CoeffQ, NonCommutativeMultiply[b___]]] :=
  a adj[NonCommutativeMultiply[b]]
adj[Times[a_?CoeffQ, b_]] := a adj[b]
```

```
(* Functions to convert between Mathematica's
noncommutative multiplication and our data structure *)
ToProd[f_] := Expand[Prod[(f //. NonCommutativeMultiply -> Prod)]]
ToNonCommutativeMultiply[f_] := f //. {Prod[] -> 1,
  Prod[a_] -> Times[a], Prod[a_, b_] -> NonCommutativeMultiply[a, b]}
```

```
(* Auxiliary functions *)
(* Multiply out a given certificate *)
MultiplyOut[certificate_] :=
  Expand[ToNonCommutativeMultiply[Total[Map[ToProd, certificate]]]]
(* Check whether a given certificate is w.r.t. given assumptions *)
LinearCombinationQ[certificate_, assumptions_] :=
  AllTrue[certificate[[All, 2]], MemberQ[assumptions, #] &]
(* Check whether a given certificate only contains integer coefficients *)
IntegerCoeffQ[certificate_] := Module[
  {terms},
  terms = Flatten[ Map[ToProd, Flatten[certificate]] /. Plus -> List];
  And @@ (MatchQ[Prod[___] | _Integer * Prod[___]] /@ terms)
];
```

```
(* Check that a single certificate indeed gives a given claim, is w.r.t. to
```

```

the assumptions and that it only contains integer coefficients *)
CheckCertificate[certificate_, claim_, assumptions_] :=
  (MultiplyOut[certificate] === claim) &&
  LinearCombinationQ[certificate, assumptions] && IntegerCoeffQ[certificate]
(* Check several certificates at once *)
CheckCertificates[certificates_, claims_, assumptions_] :=
  MapThread[CheckCertificate[#1, #2, assumptions] &, {certificates, claims}]

(* Define some variables that appear in the certificates *)
p = aa ** a ** b ** c ** cc;
q = c ** cc ** bb ** aa ** a;
m = a ** b ** c;
u1 = b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa];
u2 = adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a;
v1 = adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc;
v2 = bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c];

```

Theorem 2.1 (Hartwig original version)

Let A, B, C with Moore-Penrose inverses $A^\dagger, B^\dagger, C^\dagger$ be such that $M = ABC$ is defined. Let $P = A^\dagger ABC C^\dagger$ and $Q = C C^\dagger B^\dagger A^\dagger A$. Then, the following are equivalent:

- i) $M^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$;
- ii) $Q \in P\{1, 2\}$ and both of A^*APQ and $QPC C^*$ are Hermitian;
- iii) $Q \in P\{1, 2\}$ and both of A^*APQ and $QPC C^*$ are EP;
- iv) $Q \in P\{1\}$, $R(A^*AP) = R(Q^*)$, and $R(CC^*P^*) = R(Q)$;
- v) $PQ = (PQ)^2$, $R(A^*AP) = R(Q^*)$, and $R(CC^*P^*) = R(Q)$;

```

In[*]:= cond1 = {mm - cc ** bb ** aa};
cond2 = {p ** q ** p - p, q ** p ** q - q, adj[a] ** a ** p ** q - adj[adj[a] ** a ** p ** q],
  q ** p ** c ** adj[c] - adj[q ** p ** c ** adj[c]]};
cond4 = {p ** q ** p - p, adj[a] ** a ** p - adj[q] ** v1,
  adj[q] - adj[a] ** a ** p ** v2,
  c ** adj[c] ** adj[p] - q ** u1, q - c ** adj[c] ** adj[p] ** u2};
cond5 = {p ** q ** p ** q - p ** q, adj[a] ** a ** p - adj[q] ** v1, adj[q] -
  adj[a] ** a ** p ** v2, c ** adj[c] ** adj[p] - q ** u1, q - c ** adj[c] ** adj[p] ** u2};

```

(i) \Leftrightarrow (ii)

(i) \Rightarrow (ii)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -b + b ** bb ** b, -bb + bb ** b ** bb,
  -b ** bb + adj[bb] ** adj[b], -bb ** b + adj[b] ** adj[bb], -c + c ** cc ** c,
  -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm,
  -a ** b ** c ** mm + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm - cc ** bb ** aa,

```

```

-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
-adj[b] + adj[b] ** adj[bb] ** adj[b], -adj[bb] + adj[bb] ** adj[b] ** adj[bb],
b ** bb - adj[bb] ** adj[b], bb ** b - adj[b] ** adj[bb],
-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc}, {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c,
-mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], cc},
{aa ** a ** b ** c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], cc},
{-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{-aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[mm] -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, cc},
{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc}},
{{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc **
bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1}, {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1}, {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},

```

$\{-c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],$
 $cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\}, \{-c, mm - cc ** bb ** aa,$
 $a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\}, \{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm, a\}, \{c, mm - cc ** bb ** aa, a\},$
 $\{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm - cc ** bb ** aa, a\},$
 $\{c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm ** a\},$
 $\{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** aa ** a\}, \{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a\},$
 $\{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a\},$
 $\{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1\},$
 $\{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1\},$
 $\{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a\},$
 $\{adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a\},$
 $\{adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a\}, \{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a\},$
 $\{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a\},$
 $\{adj[a], a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a\},$
 $\{-adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, a\},$
 $\{adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a\},$
 $\{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a\},$
 $\{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]\},$
 $\{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]\},$
 $\{-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]\}, \{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$

```

a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{-c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], cc ** c ** adj[c]},
{-c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c ** adj[c]},
{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[cc] ** adj[c]}, {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] ** adj[c]}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond2, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

(ii) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -b + b ** bb ** b, -bb + bb ** b ** bb,
-b ** bb + adj[bb] ** adj[b], -bb ** b + adj[b] ** adj[bb], -c + c ** cc ** c,
-cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
-a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm,
-a ** b ** c ** mm + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], -aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,
-c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c **
cc ** bb ** aa ** a, adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], -adj[b] + adj[b] ** adj[bb] ** adj[b],
-adj[bb] + adj[bb] ** adj[b] ** adj[bb], b ** bb - adj[bb] ** adj[b],
bb ** b - adj[b] ** adj[bb], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],

```

```

a ** b ** c ** mm - adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ,
mm ** a ** b ** c - adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm] ,
- adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] +
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] **
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ,
- adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] +
  adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] **
  adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ,
- adj [a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a +
  adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] **
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a ,
- c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] +
  c ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] **
  adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] } ;
certificate = { { { cc ** bb , - aa + aa ** a ** aa , 1 } ,
  { cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** cc ** c ** adj [c] ** adj [b] , adj [a] ** a ** aa ** a ** b **
    c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] **
    adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a , aa } ,
  { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** mm ** a ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] , adj [a] ** a ** aa **
    a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [
    cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a ,
    aa } , { - cc ** c ** cc ** bb ** aa , - a + a ** aa ** a , b ** c ** cc ** c ** cc ** bb **
    aa ** a ** aa } , { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** cc ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ,
    - a + a ** aa ** a , b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa } , { cc ** bb ** aa **
    adj [mm] ** mm ** a ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] , - a + a ** aa ** a , b ** c **
    cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa } , { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ,
    - adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] , a ** aa } , { cc ** bb ** aa ** adj [mm] **
    cc ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] **
    adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] , - adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] , a ** aa } ,
  { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** mm ** a ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] **
    adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ,
    - adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] , a ** aa } ,
  { - cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b , - c + c ** cc ** c , cc ** bb ** aa ** a ** aa } ,
  { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** cc ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** a ** b ,
    - c + c ** cc ** c , cc ** bb ** aa ** a ** aa } , { cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** mm ** a ** b **
    c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** a ** b , - c + c ** cc ** c , cc ** bb ** aa ** a ** aa } ,
  { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** cc ** c ** adj [c] ** adj [b] , aa ** a - adj [a] ** adj [aa] ,
    adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** a ** aa } ,
  { cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** mm ** a ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ,
    aa ** a - adj [a] ** adj [aa] , adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] **
    adj [b] ** adj [a] ** a ** aa } , { cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** cc ** c ** adj [c] **
    adj [b] ** aa ** a ** adj [bb] ** adj [cc] , - adj [c] + adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ,
    adj [b] ** adj [a] ** a ** aa } , { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** mm ** a **
    b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** aa ** a ** adj [bb] ** adj [cc] ,
    - adj [c] + adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] , adj [b] ** adj [a] ** a ** aa } ,
  { - cc ** bb ** aa ** adj [mm] ** cc , c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc **
    c ** adj [c] - c ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **

```

adj[a] ** adj[c] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** mm ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a **
b ** c ** cc ** c ** adj[c] - c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** aa}, {cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** cc ** c ** cc ** bb ** aa,
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** mm ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** a ** aa}, {cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** mm ** a ** b ** c **
adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa}, {-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** mm ** a ** b **
c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], aa ** a -
adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** mm ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a **
aa}, {-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** cc ** c, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** mm ** a ** b ** c, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa ** adj[mm], mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa, -adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm], mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa, -adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa}, {cc ** bb ** aa ** adj[mm],
-cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] **
c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
adj[a] ** a ** aa}, {cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** a ** aa},
{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** a ** aa},

$\{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** a ** aa\}, \{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c],$
 $-adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** aa ** a ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], aa ** a -$
 $adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** aa\}, \{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb],$
 $-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[a] **$
 $a ** aa\}, \{cc ** bb ** aa ** adj[mm], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[mm], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** aa ** a ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b], adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c **$
 $cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, a ** aa\},$
 $\{-mm, a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa\},$
 $\{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, aa\},$
 $\{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$

adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b], aa ** a -
 adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** aa ** a ** adj[bb],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** aa **
 a ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** aa ** a **
 adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa}, {adj[c] **
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** aa ** a ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] **
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa}, {adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a **
 adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] **
 adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** aa ** a ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa] ** aa ** a ** adj[bb] **
 c ** cc ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-cc, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa **
 a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] - c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
 adj[cc] ** mm ** a ** aa}, {cc ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
 b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
 -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b,
 -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
 {-cc ** c, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},

$a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $cc ** bb ** aa ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** mm ** a ** aa \}, \{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa] ** aa **$
 $a ** adj[bb] ** adj[cc], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** aa ** a ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa] ** aa ** a ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** b **$
 $c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm, -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** mm,$
 $-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c,$
 $cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-mm ** a, -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc **$
 $bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c ** mm ** a ** aa \},$
 $\{-mm, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** mm ** a ** aa \},$
 $\{mm ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,$

```

b ** c ** cc ** c ** mm ** a ** aa}, {mm ** a ** aa ** a ** b,
-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** mm ** a ** aa},
{mm, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** mm ** a ** aa},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] **
adj[cc] ** mm ** a ** aa}, {-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** aa ** a ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm ** a ** aa},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c ** mm ** a ** aa},
{-mm ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1},
{-mm ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1},
{mm, a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], 1},
{-1, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm, 1}}};

```

```
In[8]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]
```

```
Out[8]:= {True}
```

(ii) \Leftrightarrow (iii)

(ii) \Rightarrow (iii)

```
In[9]:= (* This holds trivially *)
```

(iii) \Rightarrow (ii)

```

In[10]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -b + b ** bb ** b, -bb + bb ** b ** bb,
-b ** bb + adj[bb] ** adj[b], -bb ** b + adj[b] ** adj[bb], -c + c ** cc ** c,
-cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
-a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm,
-a ** b ** c ** mm + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], -aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,
-c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc **
c ** cc ** bb ** aa ** a, -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a +
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u,
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** s,
-c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** v,
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** w,
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
-adj[b] + adj[b] ** adj[bb] ** adj[b], -adj[bb] + adj[bb] ** adj[b] ** adj[bb],

```

```

b ** bb - adj [bb] ** adj [b], bb ** b - adj [b] ** adj [bb],
- adj [c] + adj [c] ** adj [cc] ** adj [c], - adj [cc] + adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc],
c ** cc - adj [cc] ** adj [c], cc ** c - adj [c] ** adj [cc], - adj [c] ** adj [b] ** adj [a] +
  adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a],
- adj [mm] + adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm],
a ** b ** c ** mm - adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a],
mm ** a ** b ** c - adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm],
- adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] +
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] **
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa],
- adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] +
  adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] **
  adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c],
- adj [a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a +
  adj [u] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] **
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a,
adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] **
  adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a -
  adj [s] ** adj [a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
- c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] +
  adj [v] ** c ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] **
  adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c],
c ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
  adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] -
  adj [w] ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] };
certificate = { { {-1, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc},
  {adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc}, {1, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
    b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
    aa ** a ** b ** c ** cc}, {adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc},
  {adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj [a] ** adj [aa],
    aa ** a ** b ** c ** cc}, {adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, cc ** c - adj [c] ** adj [cc],
    cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc}, {adj [a] ** adj [aa] ** b,
    -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc},
  {adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc],
    cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc}, {1, -aa ** a ** b ** c ** cc +
    aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, 1},
  {1, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc},
  {-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc}, {-1, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
    b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj [a] ** adj [aa], aa ** a ** b ** c ** cc},
  {-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
    a ** b ** c ** cc}, {-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,

```

```

-aa**a+adj[a]**adj[aa],aa**a**b**c**cc},
{-adj[a]**adj[aa]**b**c,cc**c-adj[c]**adj[cc],
cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc},{-adj[a]**adj[aa]**b,
-c+c**cc**c,cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc},
{-adj[a]**adj[aa]**b**c,-cc**c+adj[c]**adj[cc],
cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc}},
{-c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],1},
{c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc**c**cc**bb,
aa**a-adj[a]**adj[aa],1},{c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],1},
{-c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc**c**cc**bb,
aa**a-adj[a]**adj[aa],1},{c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],
aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{c**cc**bb,-aa+aa**a**aa,a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{c**cc**bb,-aa**a+adj[a]**adj[aa],
aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c,cc**c-adj[c]**adj[cc],
cc**bb**adj[a]**adj[aa]},{c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b,
-c+c**cc**c,cc**bb**adj[a]**adj[aa]},
{c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c,-cc**c+adj[c]**adj[cc],
cc**bb**adj[a]**adj[aa]},{1,-c**cc**bb**aa**a+c**cc**bb**
aa**a**aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a,1},{-c**cc**bb,
aa**a-adj[a]**adj[aa],aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{-c**cc**bb,-aa+aa**a**aa,a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{-c**cc**bb,-aa**a+adj[a]**adj[aa],
aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{-c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{-c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c,
cc**c-adj[c]**adj[cc],cc**bb**adj[a]**adj[aa]},
{-c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b,-c+c**cc**c,
cc**bb**adj[a]**adj[aa]},{-c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c,
-cc**c+adj[c]**adj[cc],cc**bb**adj[a]**adj[aa]}},{1,
-adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a],a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{adj[a],a**aa-adj[aa]**adj[a],a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a},
{adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**
adj[c]**adj[b]**adj[a],a**aa-adj[aa]**adj[a],a},
{-adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**
adj[c]**adj[b]**adj[a],a**aa-adj[aa]**adj[a],a},
{adj[a]**a**b**c**cc**c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],1},
{-adj[a]**a**b**c**cc**c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],1},
{-adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**adj[b],
-adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a],a},
{adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**adj[b],
-adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a],a},
{adj[u]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**
adj[c]**adj[b],-adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a],a},
{-adj[u]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**c**cc**adj[b]**adj[a]**

```


$-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u), \{-adj[a] ** a ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{1, -adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c **$
 $cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c ** cc **$
 $bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u), \{adj[a] ** a ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u), \{adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u),$
 $\{adj[a] ** a ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, u),$
 $\{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u),$
 $\{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,$
 $a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u), \{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u),$
 $\{-adj[u], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a), \{adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a),$
 $\{adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a),$
 $\{-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] **$

```

adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a},
{-1, -adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a +
adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, 1}, {-1,
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{-adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{-adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb]},
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a}},
{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}, {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{-c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
1}, {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c]}, {adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **
bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c]},
{adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **
bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c]},
{c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c]}, {adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **
bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{1, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** w, 1},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a **
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] - c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **

```


adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{adj[w] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c **
cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{adj[w] ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{adj[w] ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c **
cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{-c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** w}, {adj[w] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** w},
{-c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[
b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
w}, {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** w},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** w},
{adj[w], -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa **
a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, b ** c ** adj[c]},
{adj[w] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c]},
{-adj[w] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c]},

```

{-1, c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[w] ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], 1},
{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}}};

```

```
In[ ]:= CheckCertificates[certificate, cond2, assumptions]
```

```
Out[ ]:= {True, True, True, True}
```

(i) \Leftrightarrow (iv)

(i) \Rightarrow (iv)

```

In[ ]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -b + b ** bb ** b, -bb + bb ** b ** bb,
  -b ** bb + adj[bb] ** adj[b], -bb ** b + adj[b] ** adj[bb], -c + c ** cc ** c,
  -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm,
  -a ** b ** c ** mm + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm - cc ** bb ** aa,
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  -adj[b] + adj[b] ** adj[bb] ** adj[b], -adj[bb] + adj[bb] ** adj[b] ** adj[bb],
  b ** bb - adj[bb] ** adj[b], bb ** b - adj[b] ** adj[bb],
  -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}};
certificate = {{{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** b ** c ** cc}, {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c,
  -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], cc},
  {aa ** a ** b ** c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc}},

```

```

{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{-aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[mm] -
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, cc},
{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc}},
{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc},
{adj[a], a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc},
{adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc}, {-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{adj[a] ** a ** b ** c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  cc}, {adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{adj[a] ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{-adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, cc}},
{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1}, {-1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], -adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], adj[c]},
{-adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c]},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[c]}, {-adj[a], a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] ** adj[c]}, {adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, adj[mm] ** adj[c]}},

```

```

{{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[aa]}, {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
 {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, adj[aa]},
 {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, adj[aa]},
 {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {-c, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]}},
{{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a}, {-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a},
{-c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm, a}, {-c, mm - cc ** bb ** aa, a},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm - cc ** bb ** aa, a},
{-c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm ** a},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond4, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True, True}

(iv) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -b + b ** bb ** b, -bb + bb ** b ** bb,
  -b ** bb + adj[bb] ** adj[b], -bb ** b + adj[b] ** adj[bb], -c + c ** cc ** c,
  -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm,
  -a ** b ** c ** mm + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], -aa ** a ** b ** c ** cc +
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],

```

```

adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** w -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, - c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s,
- adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], - adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
- adj[b] + adj[b] ** adj[bb] ** adj[b], - adj[bb] + adj[bb] ** adj[b] ** adj[bb],
b ** bb - adj[bb] ** adj[b], bb ** b - adj[b] ** adj[bb],
- adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], - adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
- adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
- adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
- adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[w] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
- adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[s] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] };
certificate = { { {cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1}, {cc, - c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s, aa},
  {-mm ** a ** b, - c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** adj[c] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s, aa},
  {- adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], s ** aa},
  {cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    s ** aa}, {mm ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], s ** aa},
  {-mm ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], s ** aa},
  {1, mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s ** aa},
  {1, - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** s ** aa},
  {-1, - adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** aa ** a ** s ** aa},
  {-cc ** c, - adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** aa ** a ** s ** aa},
  {mm ** a ** b ** c, - adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
    adj[b] ** aa ** a ** s ** aa},
  {-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** aa ** a ** s ** aa},
  {1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** aa},
  {mm ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc], - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa},
  {-mm, a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa},
  {mm ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
    a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa},
  {-mm ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},

```



```

{-mm**a**b**adj[v]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a],
 a**aa-adj[aa]**adj[a], a**b**c**mm**a**aa},
{mm**a**b**adj[v]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a], -a+a**aa**a,
 b**c**mm**a**aa}, {-mm**a**b**adj[v]**c**cc**adj[b],
 -adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a], a**aa},
{-mm**a**b**adj[v]**c**cc**adj[b]**adj[a], a**aa-adj[aa]**adj[a],
 a**aa}, {mm**a**b**adj[v]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a],
 a**aa-adj[aa]**adj[a], a**aa**a**aa},
{-mm**a**b**adj[v]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a],
 -a+a**aa**a, aa**a**aa}, {mm**a**b**adj[v],
 c**cc-adj[cc]**adj[c], adj[b]**adj[a]**a**aa**a**aa},
{mm**a**b**c**cc**bb, -aa+aa**a**aa, a**aa},
{mm**a**b, c**cc**bb**aa**a-
 adj[v]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[a]**a,
 b**c**mm**a**aa}, {-mm**a**b, c**cc**bb**aa**a-
 adj[v]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[a]**a,
 aa**a**aa}, {-mm**a**b, -c+c**cc**c, mm**a**aa},
{mm**a**b**c**cc**bb**aa**a**b, -c+c**cc**c, mm**a**aa},
{-mm**a, -aa**a**b**c**cc+aa**a**b**c**cc**c**
 cc**bb**aa**a**aa**a**b**c**cc, c**mm**a**aa},
{-mm, -a+a**aa**a, b**c**cc**c**mm**a**aa},
{mm**a**aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa, -a+a**aa**a,
 b**c**cc**c**mm**a**aa}, {mm**a**aa**a**b,
 -c+c**cc**c, cc**bb**aa**a**b**c**cc**c**mm**a**aa},
{mm, -a+a**aa**a, b**c**cc**bb**aa**a**b**c**cc**c**mm**a**aa},
{-mm**adj[mm]**adj[c]**adj[b], -adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a], 1},
{-mm**adj[mm]**adj[c]**adj[b]**adj[a], a**aa-adj[aa]**adj[a], 1},
{mm, a**b**c**mm-adj[mm]**adj[c]**adj[b]**adj[a], 1},
{-1, -mm+mm**a**b**c**mm, 1}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]:= {True}

(i) \Leftrightarrow (v)

(i) \Rightarrow (v)

```

In[*]:= assumptions = {-a+a**aa**a, -aa+aa**a**aa, -a**aa+adj[aa]**adj[a],
 -aa**a+adj[a]**adj[aa], -b+b**bb**b, -bb+bb**b**bb,
 -b**bb+adj[bb]**adj[b], -bb**b+adj[b]**adj[bb], -c+c**cc**c,
 -cc+cc**c**cc, -c**cc+adj[cc]**adj[c], -cc**c+adj[c]**adj[cc],
 -a**b**c+a**b**c**mm**a**b**c, -mm+mm**a**b**c**mm,
 -a**b**c**mm+adj[mm]**adj[c]**adj[b]**adj[a],
 -mm**a**b**c+adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[mm], mm-cc**bb**aa,
 -adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a], -adj[aa]+adj[aa]**adj[a]**adj[aa],
 a**aa-adj[aa]**adj[a], aa**a-adj[a]**adj[aa],
 -adj[b]+adj[b]**adj[bb]**adj[b], -adj[bb]+adj[bb]**adj[b]**adj[bb],

```

```

b ** bb - adj [bb] ** adj [b], bb ** b - adj [b] ** adj [bb],
- adj [c] + adj [c] ** adj [cc] ** adj [c], - adj [cc] + adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc],
c ** cc - adj [cc] ** adj [c], cc ** c - adj [c] ** adj [cc], - adj [c] ** adj [b] ** adj [a] +
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a],
- adj [mm] + adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm],
a ** b ** c ** mm - adj [mm] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a],
mm ** a ** b ** c - adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm],
adj [mm] - adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] };
certificate = { { {-1, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {1, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c **
cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], 1},
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc] ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], 1},
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c,
cc ** c - adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc], cc ** c - adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj [a] ** adj [aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-adj [a] ** adj [aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc],
cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] }, {-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c,
-mm ** a ** b ** c + adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm],
cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c,
mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a],
adj [mm] - adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc], cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {adj [a] ** adj [aa] ** b ** c,
cc ** c - adj [c] ** adj [cc], adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{adj [a] ** adj [aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj [c] ** adj [b] ** adj [a] **
adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc], adj [c] ** adj [b] ** adj [
a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc], -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc], -cc ** c + adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] },
{aa ** a ** b ** c, -mm ** a ** b ** c + adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [mm],
cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] }, {-aa ** a ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a],

```

```

adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] },
{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] },
{1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] }},
{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc},
{adj[a], a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc},
{adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc}, {-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{adj[a] ** a ** b ** c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  cc}, {adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{adj[a] ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{-adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, cc}},
{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1}, {-1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], -adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], adj[c]},
{-adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c]},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[c]}, {-adj[a], a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[mm] ** adj[c]}, {adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, adj[mm] ** adj[c]}},
{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, mm - cc ** bb ** aa, a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},

```

```

{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 adj[aa]}, {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
 {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, adj[aa]},
 {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c, mm - cc ** bb ** aa, adj[aa]},
 {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
 {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {-c, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]}},
 {{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
 adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a}, {-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a},
 {-c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm, a}, {-c, mm - cc ** bb ** aa, a},
 {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm - cc ** bb ** aa, a},
 {-c, -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm], mm ** a},
 {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 adj[mm] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond5, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True, True}

(v) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -b + b ** bb ** b, -bb + bb ** b ** bb,
 -b ** bb + adj[bb] ** adj[b], -bb ** b + adj[b] ** adj[bb], -c + c ** cc ** c,
 -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 -a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm,
 -a ** b ** c ** mm + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 -mm ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
 -aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c ** cc **
 c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
 adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** w -
 adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s,
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
 a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 -adj[b] + adj[b] ** adj[bb] ** adj[b], -adj[bb] + adj[bb] ** adj[b] ** adj[bb],
 b ** bb - adj[bb] ** adj[b], bb ** b - adj[b] ** adj[bb],
 -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +

```

```

adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ,
- adj[mm] + adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ,
a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ,
mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] , - adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] , c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ,
- adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] , adj[w] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ,
- adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[s] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] } ;
certificate = { { {1, mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] , mm} ,
  { - cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ,
    mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] , mm} ,
  { - adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ,
    mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] , mm} ,
  { cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] **
    adj[aa] ** b ** c , mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] , mm} ,
  { adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ,
    c ** cc - adj[cc] ** adj[c] , adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm} ,
  { - cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] , c ** cc - adj[cc] ** adj[c] , adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm} ,
  { cc ** bb ** adj[u] , - adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] , adj[a] ** adj[mm] ** mm} ,
  { - mm ** a ** adj[u] , - adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
    adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ,
    adj[a] ** adj[mm] ** mm} , { cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ,
    - adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ,
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm} ,
  { - mm ** a ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ,
    - adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ,
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm} ,
  { - cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] , - adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ,
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm} ,
  { mm ** a ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] , - adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ,
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm} ,

```

[illegible]


```

{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b],
 - adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[s] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[s], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{- cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s],
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{- cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] **
  adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
  - c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{- cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] **
  adj[aa] ** b, - c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  - cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{- cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] **
  adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  - cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{cc ** bb ** aa, - a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, mm},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** aa, - a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, mm},
{- cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** aa,
  - a ** b ** c + a ** b ** c ** mm ** a ** b ** c, mm},
{- cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** mm ** a ** b ** c ** mm},
{- adj[c] ** adj[b] ** adj[s],
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** mm ** a ** b ** c ** mm},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s],
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** mm ** a ** b ** c ** mm},
{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** mm},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[s], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** mm},
{- cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** mm},
{- cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s],
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** mm},
{- adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, - c + c ** cc ** c, mm},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, - c + c ** cc ** c, mm},
{- adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  - cc ** c + adj[c] ** adj[cc], mm},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s] **
  adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, - cc ** c + adj[c] ** adj[cc], mm},
{adj[c] ** adj[b], - adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[s] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc] ** mm},
{- cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b],
  - adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +

```


adj[s] ** aa ** a ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc] ** mm},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[s], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s],
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] **
adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s] **
adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[s] ** adj[a] **
adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** mm},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], mm},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], mm},
{mm ** a ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{-mm ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** mm}, {mm ** a ** b ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{-mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{-mm ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] **
adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm}, {-mm ** a ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{mm ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{-mm ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{mm ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{-mm ** a, -aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c **
cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm}, {-mm ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
{mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,

aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a **
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {-mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
 a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {-mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
 -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {-mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc **
 bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **
 b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc **
 bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {mm ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **
 b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {-mm, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u **
 adj[bb] ** adj[cc] ** mm}, {-mm ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa] ** s, b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc] ** mm}, {-mm ** a ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s,
 b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm},
 {cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],

$b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{-mm ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s ** b **$
 $c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{mm ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s **$
 $b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $s ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{mm ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s ** b ** c ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{1, mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** s ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\}, \{1, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] **$
 $s ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $s ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $s ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{-1, mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{-1, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** mm\},$
 $\{cc ** adj[v] ** adj[cc], -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], 1\},$
 $\{cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** mm - adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], 1\},$
 $\{-cc ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $b ** c ** mm\}, \{cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** mm\},$
 $\{-cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{-cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{-cc, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa\},$

```

{cc ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** mm},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** mm},
{-1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** mm},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa}, {1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{mm, -a + a ** aa ** a, b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm}, {mm ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{-mm, -a + a ** aa ** a, b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[mm] ** mm}, {-mm ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{1, mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm}, {1, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{-1, mm ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm},
{-1, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[mm] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[mm] ** mm}, {-1, -mm + mm ** a ** b ** c ** mm, 1}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]:= {True}

Theorem 2.2

To prove Theorem 2.2, the computations of Theorem 2.1 can be adopted.

Theorem 2.3

Let A, B, C with Moore-Penrose inverses A^\dagger, C^\dagger and let $M = A B C$. Furthermore, let \tilde{B} be such that $Q = C C^\dagger \tilde{B} A^\dagger A$ exists and let $P = A^\dagger A B C C^\dagger$. Then, the following are equivalent:

- i) M is Moore-Penrose invertible and $M^\dagger = C^\dagger \tilde{B} A^\dagger$;
- iv) $Q \in P\{1\}$, $R(A^* A P) \supseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \subseteq R(Q)$;
- v) M is right $*$ -cancellable, $P Q = (P Q)^2$, $R(A^* A P) \supseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \subseteq R(Q)$;
- vi) $Q \in P\{2\}$, $R(A^* A P) \supseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \subseteq R(Q)$;

```

In[8]:= cond1 = {-m + m ** cc ** bb ** aa ** m, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** m ** cc ** bb ** aa,
  -m ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[m],
  -cc ** bb ** aa ** m + adj[m] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
cond4 = {p ** q ** p - p, adj[q] - adj[a] ** a ** p ** v2, c ** adj[c] ** adj[p] - q ** u1};
cond5 = {z ** m, p ** q ** p ** q - p ** q,
  adj[q] - adj[a] ** a ** p ** v2, c ** adj[c] ** adj[p] - q ** u1};
cond6 = {q ** p ** q - q, adj[q] - adj[a] ** a ** p ** v2, c ** adj[c] ** adj[p] - q ** u1};

```

(i) \Leftrightarrow (iv)

(i) \Rightarrow (iv)

```

In[9]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
    a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
    a ** b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
  {aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
  {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},

```

```

{adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
{aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc},
{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc}},
{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1}, {-1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c]},
{adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}},
{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond4, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True}

(iv) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
 -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
 -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
 -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -

```

```

adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
-aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa **
a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + aa ** a ** b **
c ** cc ** c ** adj[c], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]};
certificate = {{ {a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1}, {a, -aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c}, {-a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
a ** b ** c ** cc ** c}, {-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c}, {-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{-1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{-a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] **
adj[aa] ** b ** c ** cc ** c}, {1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c}, {a ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1}},
{{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{-cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1},
{cc ** adj[v], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **

```


adj[aa] ** adj[a] ** a, aa}, {cc ** bb ** aa ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{-cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{cc ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** aa}, {cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa}, {-1, -cc + cc ** c ** cc,
bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]},
{-1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa}, {1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],

$-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a, -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c ** cc ** c **$
 $cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc **$
 $bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **$
 $cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\}, \{-cc ** bb ** aa ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\}\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{a ** b ** adj[v], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[a]\}, \{a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]\}, \{a ** b ** adj[v],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $c ** cc ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{-a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$

```

{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v,
  adj[b] ** adj[a]}, {adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {-a ** b ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {adj[aa] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a, -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb **
  aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, v ** adj[b] ** adj[a]},
{a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa **
  a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],

```

```

cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] },
{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **
cc ** v ** adj[b] ** adj[a] }, {a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] },
{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] }, {-1,
-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] },
{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b,
c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc] },
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc] },

```

```

{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
 a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -
 adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,
 -aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a, -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b **
 c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c -
 adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c +
 adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
 b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]}, {cc ** bb ** adj[u] ** adj[a],
 -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
 a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v],
 -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],

```

[illegible]

$aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a +$
 $a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc]\}, \{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a, -aa ** a ** b ** c ** cc +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,$
 $v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc **$
 $v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\}, \{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,$
 $a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b **$
 $c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **$
 $v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b **$
 $c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$

```

{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **
 v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
 adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb, -adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + aa ** a **
 b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}, {-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb, -adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]},
{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[cc]}, {cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] **
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
 a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
 a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** adj[v], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
 adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v],
 -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] ** adj[c] **
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
 adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {cc ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},

```


adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{cc, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** aa ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] }, {cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] }, {-cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] }, {cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] **
c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] **
c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] **
c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v,
adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa **
a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] },

```

{cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u **
  adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc ** bb ** aa ** a, -aa ** a ** b ** c ** cc +
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,
  v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa **
  a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v **
  adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] **
  adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v **
  adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] **
  adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],

```

```

a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** a **
u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}}};

```

```
In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]
```

```
Out[*]:= {True, True, True, True}
```

(i) \Leftrightarrow (v)

(v) \Rightarrow (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
-c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
-aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c ** cc **
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **

```

```

adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ,
-a + a ** aa ** a , -aa + aa ** a ** aa , -a ** aa + adj[aa] ** adj[a] ,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa] , -c + c ** cc ** c , -cc + cc ** c ** cc ,
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c] , -cc ** c + adj[c] ** adj[cc] ,
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v , -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ,
-aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c ** cc **
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] } ;
certificate = { { {-a ** b ** c ** cc ** bb , -aa ** a + adj[a] ** adj[aa] , b ** c} ,
{-1 , a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c , 1} ,
{-a ** b ** c ** cc ** bb , aa ** a - adj[a] ** adj[aa] , b ** c} } ,
{-cc ** bb , -aa ** a + adj[a] ** adj[aa] , b ** c ** cc ** bb ** aa} ,
{-cc ** adj[v] ** adj[cc] , adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] , 1} ,
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] , adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ,
1} , {cc ** adj[v] , -c ** cc + adj[cc] ** adj[c] , adj[b] ** adj[a]} ,
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] , -c ** cc + adj[cc] ** adj[c] , adj[b] ** adj[a]} ,
{-cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ,
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c] , adj[b] ** adj[a]} ,
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] , -c ** cc + adj[cc] ** adj[c] ,
adj[b] ** adj[a]} , {-cc ** adj[v] , -c ** cc + adj[cc] ** adj[c] ,
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] , -c ** cc + adj[cc] ** adj[c] ,
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,
{cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] , -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ,
adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} , {cc ** bb ** aa ,
a ** aa - adj[aa] ** adj[a] , adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,
{cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] , a ** aa - adj[aa] ** adj[a] ,
adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} , {cc , c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ,
aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,
{-cc ** c ** cc ** bb , aa ** a - adj[a] ** adj[aa] ,
aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,
{cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] , -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ,
a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,
{-cc ** adj[v] , c ** cc - adj[cc] ** adj[c] , adj[b] ** adj[a] ** a ** aa **
adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} , {-cc ** c ** cc ** bb ,
-aa + aa ** a ** aa , adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,
{-cc ** c ** cc ** bb , -aa ** a + adj[a] ** adj[aa] ,
aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]} ,

```

$\{-cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{-cc ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],$
 $a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1\}, \{-cc, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa\},$
 $\{cc ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa\}, \{cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c **$
 $cc ** adj[b] ** adj[a]\}, \{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a],$
 $-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\}, \{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$

$-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa, a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,$
 $cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\}, \{-cc ** bb ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\}, \{cc ** bb ** aa,$
 $-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\}\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], 1\},$
 $\{a ** b ** adj[v], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{-a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa\},$
 $\{a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v,$
 $adj[b] ** adj[a]\}, \{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\}, \{adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\}, \{adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]\},$

```

{a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  - adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{1, a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{1, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-1, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]}, {-1,
  - adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]}},
{cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  - adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
  -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b,
  c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  - adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]},

```


$\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],$
 $- adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],$
 $a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $- adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $- aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $- aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,$
 $cc ** v ** adj[cc]\}, \{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a],$
 $- a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], - a ** aa + adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\}, \{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a],$
 $- adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\}, \{-adj[c], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],$
 $- adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],$
 $a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$

$aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \}, \{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b **$
 $c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \}, \{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a **$
 $b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b **$
 $c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \}, \{-adj[c],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc] \}, \{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** a ** b ** adj[v],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c **$
 $cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] \},$

$\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,$
 $cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb, -adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc]\}, \{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\}, \{-cc,$
 $-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc]\}, \{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb, -adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[cc]\}, \{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1\},$
 $\{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1\},$
 $\{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $u ** adj[bb] ** adj[cc]\}, \{cc ** adj[v] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\}, \{-cc ** adj[v], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{cc ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$


```

{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
  a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc ** c ** cc ** bb,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v,
  adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b],
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa **
  a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] **
  a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a **
  u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {cc ** bb ** aa ** a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] **
  adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa, a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},

```

```

{-cc ** bb ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
 adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
 adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}}};

```

```
In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]
```

```
Out[*]:= {True, True, True, True}
```

(i) => (v)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
 -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
 -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
 -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
 -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
 -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
 z ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 cc ** bb ** aa ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[z]};
certificate = {{{-z, -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, 1},
 {-z ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], 1},
 {1, z ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}},
 {{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
 {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c **
 cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
 {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
 {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
 {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]}}},

```

```

{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
  a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] **
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[
  a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc], -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]}, {aa,
  -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]}},
{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1}, {-1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c]},
{adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}},
{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **

```

```

adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]}}};

```

```
In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond5, assumptions]
```

```
Out[*]:= {True, True, True, True}
```

(i) \Leftrightarrow (vi)

(i) \Rightarrow (vi)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
-c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
-cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc **
bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1}, {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1}, {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},

```



```

{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}},
{{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1}, {-1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[a], -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c]},
{adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}},
{{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]}, {c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]},
{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]},
{-c, -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond6, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True}

(vi) => (i)

```

In[ ]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
    adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
    c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
  -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c **
    cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], c ** cc ** bb ** aa ** a -
    adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  -adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
    aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]};
certificate = {{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
  {-a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
    -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
  {a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
  {-a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
    c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]}},
  {a ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
  {a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
  {-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
  {a ** adj[u], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
    adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
    adj[cc] ** adj[c], adj[cc]}, {-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[u],
    -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
  {-a ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
  {a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]}};

```

$\{-a ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{a, -adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\}, \{-a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + aa ** a ** b ** c **$
 $cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc -$
 $adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]\},$
 $\{-a, -adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]\}, \{a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]\},$
 $\{a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]\},$

$\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]\}, \{a ** b, -c + c ** cc ** c, 1\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1\},$
 $\{a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $1\}, \{-a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +$
 $c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[bb] ** adj[cc]\}, \{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b **$
 $c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]\}, \{a ** b ** c ** cc,$
 $-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa **$
 $a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,$
 $a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c -$
 $adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c +$
 $adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{-a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]\},$
 $\{a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc]\}, \{a ** b ** c, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$

$\text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[cc]\}, \{-1, -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[cc]\},$
 $\{-a, -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] **$
 $\text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[cc]\}, \{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc]\},$
 $\{a, -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc]\}\},$
 $\{cc ** bb, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1\},$
 $\{-cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1\},$
 $\{cc ** bb, -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], aa\},$
 $\{-cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], aa\}, \{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, aa\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{1, cc ** c - \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc], cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c, cc ** c - \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc],$
 $cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\},$
 $\{1, -cc ** c + \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc], cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c, -cc ** c + \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc],$
 $cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\}, \{-1, cc ** c - \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc],$
 $cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\},$
 $\{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c ** cc ** bb **$
 $\text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\}, \{-1, -cc ** c + \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc],$
 $cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\},$
 $\{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa\}\},$
 $\{-\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb], c ** cc - \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c], \text{adj}[b] ** \text{adj}[a]\},$
 $\{-a ** b ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a], a ** aa - \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a], 1\},$
 $\{-a ** b ** \text{adj}[v] ** \text{adj}[cc] ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +$
 $c ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], \text{adj}[a]\},$
 $\{a ** b ** \text{adj}[v] ** \text{adj}[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b,$
 $-c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +$
 $c ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], \text{adj}[a]\},$
 $\{a ** b ** \text{adj}[v] ** \text{adj}[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] **$
 $b ** c ** cc ** bb, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], u ** \text{adj}[a]\},$
 $\{-a ** b ** \text{adj}[v] ** \text{adj}[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] **$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], u ** \text{adj}[a]\},$
 $\{a ** b ** \text{adj}[v] ** \text{adj}[cc] ** cc, -c + c ** cc ** c,$
 $\text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a]\},$
 $\{-a ** b ** \text{adj}[v] ** \text{adj}[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, \text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a]\},$

$\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $- adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[u] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **$
 $adj[b] ** adj[a]\}, \{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc, -c + c ** cc ** c,$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $- adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]\}, \{a ** b ** adj[v] ** adj[cc],$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +$
 $c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **$
 $cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,$
 $u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb,$

$aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc **$
 $bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b **$
 $c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa **$
 $a ** u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** c **$
 $cc ** adj[b] ** adj[a] \}, \{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** cc ** c **$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] \}, \{a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b], -adj[a] +$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \}, \{a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \}, \{-a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa \},$
 $\{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa \},$
 $\{a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1 \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa \},$
 $\{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$


```

adj[cc]**adj[c]-adj[a]**a**aa**a**b**c**cc**v,adj[b]**adj[a]},
{a,aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{adj[aa]**adj[a]**a,aa**a-adj[a]**adj[aa],
b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},{-a**b**c**cc**bb,
aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**b**c**cc**bb**aa**a,aa**a-adj[a]**adj[aa],
b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**b**c**cc**bb**aa**adj[aa]**adj[a]**a,
aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{1,-a+a**aa**a,b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{adj[aa]**adj[a],-a+a**aa**a,b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**b**c**cc**bb**aa,-a+a**aa**a,b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**b**c**cc**bb**aa**adj[aa]**adj[a],
-a+a**aa**a,b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{a,-aa**a+adj[a]**adj[aa],b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{adj[aa]**adj[a]**a,-aa**a+adj[a]**adj[aa],
b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},{-a**b**c**cc**bb**aa**a,
-aa**a+adj[a]**adj[aa],b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**b**c**cc**bb**aa**adj[aa]**adj[a]**a,
-aa**a+adj[a]**adj[aa],b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-1,a**aa-adj[aa]**adj[a],a**b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{a**b**c**cc**bb**aa,a**aa-adj[aa]**adj[a],
a**b**c**cc**v**adj[b]**adj[a]},{-1,
-adj[aa]+adj[aa]**adj[a]**adj[aa],adj[bb]**c**cc**adj[b]**adj[a]},
{a**b**c**cc**bb**aa,-adj[aa]+adj[aa]**adj[a]**adj[aa],
adj[bb]**c**cc**adj[b]**adj[a]},
{a**b**c**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
-adj[cc]+adj[cc]**adj[c]**adj[cc],cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**b**c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**
adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
-adj[cc]+adj[cc]**adj[c]**adj[cc],cc**v**adj[b]**adj[a]},
{a**b**c**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
c**cc-adj[cc]**adj[c],adj[cc]**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**adj[u]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**c**cc**adj[b]**
adj[a]**adj[aa]**adj[bb],c**cc-adj[cc]**adj[c],
adj[cc]**cc**v**adj[b]**adj[a]},{-a**b**c**cc**bb**adj[a]**
adj[aa]**b**c**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
c**cc-adj[cc]**adj[c],adj[cc]**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{a**b**c**cc**bb**adj[u]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**
c**cc**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
c**cc-adj[cc]**adj[c],adj[cc]**cc**v**adj[b]**adj[a]},
{-a**adj[u],-adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]+adj[a]**
adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**
adj[a]**adj[aa]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c],
adj[cc]**cc**v**adj[b]**adj[a]},{a**b**c**cc**bb**adj[u],
-adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]+
adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**

```


$c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,$
 $u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc **$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c **$
 $cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc **$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc **$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc **$
 $bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u **$
 $adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \}, \{a ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **$
 $bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $u ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a ** b ** c, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \},$
 $\{-a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a] \} \},$
 $\{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1 \},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[cc] \},$
 $\{cc ** bb ** adj[u], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[$
 $b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[cc] \}, \{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **$

adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], - adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
- adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb, - adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-cc ** bb, - adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]},
{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[cc]}, {cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a **
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc **

```

bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] }, {cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj [a] ** adj [aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, cc ** c - adj [c] ** adj [cc],
cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc],
cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{1, cc ** c - adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b **
c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc **
bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{1, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b **
c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-1, cc ** c - adj [c] ** adj [cc], adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc] }, {-1, -adj [c] + adj [c] ** adj [cc] ** adj [c],
adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] }});

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

Theorem 2.4

Let A, B, C with Moore-Penrose inverses A^\dagger, C^\dagger and let $M = A B C$. Furthermore, let \tilde{B} be such that $Q = C C^\dagger \tilde{B} A^\dagger A$ exists and let $P = A^\dagger A B C C^\dagger$. Then, the following are equivalent:

- i) M is Moore-Penrose invertible and $M^\dagger = C^\dagger \tilde{B} A^\dagger$;
- iv) $Q \in P\{1\}$, $R(A^* A P) \subseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \supseteq R(Q)$;
- v) $C^\dagger \tilde{B} A^\dagger$ is left $*$ -cancellable, $P Q = (P Q)^2$, $R(A^* A P) \subseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \supseteq R(Q)$;
- vi) $Q \in P\{2\}$, $R(A^* A P) \subseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \supseteq R(Q)$;

```

In[*]:= cond1 = {-m + m ** cc ** bb ** aa ** m, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** m ** cc ** bb ** aa,
-m ** cc ** bb ** aa + adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [m],
-cc ** bb ** aa ** m + adj [m] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] };
cond4 = {p ** q ** p - p, adj [a] ** a ** p - adj [q] ** v1, q - c ** adj [c] ** adj [p] ** u2};
cond5 = {cc ** bb ** aa ** z, p ** q ** p ** q - p ** q,
adj [a] ** a ** p - adj [q] ** v1, q - c ** adj [c] ** adj [p] ** u2};
cond6 = {q ** p ** q - q, adj [a] ** a ** p - adj [q] ** v1, q - c ** adj [c] ** adj [p] ** u2};

```

(i) \Leftrightarrow (iv)

(i) \Rightarrow (iv)

```

In[ ]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
    a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
    a ** b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
  {aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
  {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
  {aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc},
  {-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc}},
  {{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
  {adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
    adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc}, {-adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},

```

```

{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{-adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc}},
{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
 adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a}, {-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a},
{-c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
{-c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond4, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True}

(iv) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
 -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -c + c ** cc ** c,
 -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
 adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u,
 -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa **
 a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
 adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
 -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]};
certificate = {{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
 {a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
 {-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1}, {a, -aa ** a ** b ** c ** cc +
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
 {a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
 {-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c}, {-a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],

```


$b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c$ },
 $\{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c\},$
 $\{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,$
 $a ** b ** c ** cc ** c\}, \{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c\},$
 $\{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c\}, \{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c\},$
 $\{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c\},$
 $\{-1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c\},$
 $\{-a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** b ** c ** cc ** c\}, \{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c\},$
 $\{a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c\}, \{a ** b, -c + c ** cc ** c, 1\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1\},$
 $\{a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1\},$
 $\{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1\}\},$
 $\{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c **$
 $cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **$

$bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa\}, \{-1, -cc ** c +$
 $adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc] ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa\},$
 $\{-cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\}, \{cc, -c + c ** cc ** c,$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc -$
 $adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc **$
 $c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\}, \{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\}, \{-adj[c],$
 $-adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa\}, \{-adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **$

adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** cc ** bb ** aa}, {-1,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb,
-aa + aa ** a ** aa, 1}, {cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa}, {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, aa},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa}, {-cc ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[u] **
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c -
adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,

```

adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c +
  adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb]},
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{adj[c], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], u ** aa},
{-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] +
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa}},
{{-adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
  adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  aa}, {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
  adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc, -c + c ** cc ** c,
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[u] ** aa ** a **
  b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** c ** cc ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa}, {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] **

```

$c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\}, \{adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\}, \{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] **$
 $c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[u] ** aa ** a ** b **$
 $c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u],$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\}, \{-adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\}, \{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c],$
 $-adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], u ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** c ** cc ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\}, \{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c,$

- cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
 {- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
 adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
 adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
 {- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u],
 - aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc **
 bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c ** cc ** bb ** aa},
 {- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 - aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 - aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
 adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, - c + c ** cc ** c,
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
 adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, - cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] **
 adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, - c + c ** cc ** c,
 cc ** bb ** aa}, {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 - cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c, - cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
 {- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b],
 - adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
 adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
 {adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u],
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},

adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u],
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
- adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
- adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb], - adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], - adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], - cc + cc ** c ** cc,
bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{- 1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{- 1, - adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa}},
{- cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{- adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **
bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{- adj[c] ** adj[b] ** adj[u], - aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{- adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,

```

aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb **
  adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
  adj[c] ** adj[cc]}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1}, {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[u] **
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],

```

```

b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {-1,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]= {True, True, True, True}

(i) \Leftrightarrow (v)

(v) \Rightarrow (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -c + c ** cc ** c,
-cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u,
-aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c ** cc **
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **

```

```

adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
- adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
- adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], - adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
- adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
- adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
- adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
- a + a ** aa ** a, - aa + aa ** a ** aa, - a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
- aa ** a + adj[a] ** adj[aa], - c + c ** cc ** c, - cc + cc ** c ** cc,
- c ** cc + adj[cc] ** adj[c], - cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, - c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u,
- aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c ** cc **
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** v - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** c},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c}, {1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[aa] ** adj[bb], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** c},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** c},
{-1, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** v ** c},

```



```

- c ** cc + adj [cc] ** adj [c], v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{1, adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] - adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] **
  adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc],
  adj [c] ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c}, {adj [aa] ** adj [bb],
- c ** cc + adj [cc] ** adj [c], adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] **
  adj [c] ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c}, {1, - a ** aa + adj [aa] ** adj [a],
  adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-1, - a ** aa + adj [aa] ** adj [a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{1, - adj [aa] + adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa],
  adj [bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c}, {1, a ** aa - adj [aa] ** adj [a],
  adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{a ** b ** c ** cc ** bb, - aa ** a + adj [a] ** adj [aa], b ** c},
{- cc ** bb, - aa ** a + adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{-1, cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, 1},
{- cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj [aa] ** adj [bb], - c ** cc + adj [cc] ** adj [c], adj [b] ** adj [a]},
{adj [aa] ** adj [bb] ** adj [v] ** c,
  cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, 1},
{adj [aa] ** adj [a] ** a, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{- adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** adj [b] ** adj [a] ** a, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
  b ** c ** cc ** bb ** aa}, {adj [aa] ** adj [bb], adj [v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a,
  b ** c ** cc ** bb ** aa}, {adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b],
  - adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{- adj [aa] ** adj [bb], c ** cc - adj [cc] ** adj [c],
  adj [b] ** adj [a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj [aa] ** adj [bb] ** adj [v] ** c ** cc ** bb, - aa + aa ** a ** aa, 1},
{adj [aa] ** adj [bb] ** adj [v] ** c ** cc ** bb, - aa ** a + adj [a] ** adj [aa], aa},
{- adj [aa] ** adj [bb], adj [v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a, aa},
{adj [aa] ** adj [bb] ** adj [v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], aa},
{- adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b],
  - adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a], a ** aa},
{adj [aa] ** adj [bb], c ** cc - adj [cc] ** adj [c], adj [b] ** adj [a] ** a ** aa},
{- adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** adj [b],
  - adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a], 1},
{- adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** adj [b] ** adj [a], a ** aa - adj [aa] ** adj [a], 1},
{adj [aa], adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** v -
  adj [a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa},
{- adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** adj [b], adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] **
  adj [cc] ** adj [c] ** v - adj [a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa},
{adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb], c ** cc - adj [cc] ** adj [c], v ** bb ** aa},
{- adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb],
  c ** cc - adj [cc] ** adj [c], v ** bb ** aa},
{1, - a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj [aa] ** adj [a], - a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa},
{- adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** adj [b] ** adj [a],

```

```

-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
-a ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa},
{-1, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** v ** bb ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{-1, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa},
{1, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{-1, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa},
{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa}},
{cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **
adj[b] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **
adj[b] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa **
adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa,
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** v ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c],

```


{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 v ** bb ** aa ** a ** b ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa,
 -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a],
 -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **
 adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
 adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
 -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] **
 c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] -
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
 -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
 adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
 a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
 adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** a ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[u], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u],
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
 -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
 adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
 adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c -

adj[c] ** adj[b] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c +
adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[cc]}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1}, {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc,
-c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc,
-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** u ** b ** c}, {-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
-cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[v] ** c, cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
 adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c,
 cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **
 a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,
 -aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** u ** b ** c}, {-adj[c] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], adj[v] ** c ** cc **
 bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {-adj[c] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {-adj[c],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {adj[c] ** c ** cc ** adj[b],
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c},
 {adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 adj[aa] ** u ** b ** c},
 {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],

```

a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **
a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]= {True, True, True, True}

(i) \Rightarrow (v)

```

In[8]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** z,
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  cc ** bb ** aa ** a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
    adj[cc], adj[z] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa};
certificate = {{adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** z, 1},
  {-1, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, z},
  {-1, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** z}},
  {{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c **
    cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
    cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
    a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
    aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
    -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],

```



```

b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a), {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc], -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]}, {aa,
-a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
{1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]}},
{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc}, {-adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{-adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc}},
{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a}, {-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a},
{-c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
{-c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond5, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

(i) \Leftrightarrow (vi)

(i) \Rightarrow (vi)

```

In[ ]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
    a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
  {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc **
    bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1}, {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
  {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb,
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1}, {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
    aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
    cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
  {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
    -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa]},
  {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
    -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]},
  {c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
  {c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}},
  {{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
  {adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
    adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc}, {-adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
    adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc},

```

```

{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{-adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
{-adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc}},
{{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a}, {-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a},
{-c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
{-c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond6, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True}

(vi) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -c + c ** cc ** c,
  -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u,
  -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c **
  cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}};
certificate = {{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
  {adj[aa] ** adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
  {-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
  {adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
  {-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
  {adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},

```



```

{-a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c},
{-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c},
{-adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],
  -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[aa] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[aa], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v **
  bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c}, {-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c},

```

$\{1, -a + a ** aa ** a, b ** c\}, \{a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c\},$
 $\{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1\},$
 $\{cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\}, \{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, aa\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\}, \{-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\}, \{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** aa\}, \{-1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\}\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, 1\}, \{adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **$
 $adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v], -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,$
 $a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$

$-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] +$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb], adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1\},$
 $\{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** v - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa\},$
 $\{a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa\}, \{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa\}, \{a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[aa] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa\},$
 $\{adj[aa], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** aa\},$
 $\{-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** aa\},$

```

{adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** aa},
{-1, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc **
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** v ** bb ** aa},
{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa}},
{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  c ** cc ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a],
  -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa],
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], v ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] +
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c,
  1}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** b ** c,

```


$-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v], -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c\}, \{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa **$
 $adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c\}, \{adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c\},$
 $\{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$

$b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $adj[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa],$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $c ** cc ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],$
 $-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c \},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa],$
 $-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **$

```

adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c -
adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c +
adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[cc]}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1}, {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc,
-c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc,

```

$-c + c ** cc ** c$, $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c$ }, $\{-cc ** c$,
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc]$, $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c$,
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc]$, $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc]$, $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $u ** b ** c$ }, $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]$,
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc]$, $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb]$,
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c]$, $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{1, -cc + cc ** c ** cc$, $bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]$,
 $-cc + cc ** c ** cc$, $bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c$ }, $\{-1$,
 $-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c]$, $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]$,
 $-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c]$, $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb$,
 $-aa + aa ** a ** aa$, $adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **$
 $adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb$, $-aa + aa ** a ** aa$, $adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb$,
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa]$, $aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **$
 $a ** b ** c ** cc ** bb$, $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa]$, $aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[v]$, $-c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa **$
 $a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a$, $aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v]$,
 $-c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b **$
 $c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a$, $aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb$,
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa]$, $aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c **$
 $cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb$,
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa]$, $aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[v] ** c ** cc ** bb$, $aa ** a - adj[a] ** adj[aa]$,
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb$,
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa]$,
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{-adj[c] ** adj[v] ** c ** cc ** bb$, $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa]$,
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c$ },
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb$,
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa]$,

[illegible]

$-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c,$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],$
 $a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b],$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** v -$
 $adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c **$
 $cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc **$
 $adj[b] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\}, \{adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a],$
 $-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] **$
 $a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** v ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c\},$

```

{-adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
 -adj[cc]+adj[cc]**adj[c]**adj[cc], adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**
  adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**v**bb**aa**adj[aa]**u**b**c},
{adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
 c**cc-adj[cc]**adj[c], adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**
  adj[cc]**adj[c]**v**bb**aa**adj[aa]**u**b**c},
{-adj[c]**adj[b]**adj[a], -adj[aa]+adj[aa]**adj[a]**adj[aa],
  adj[bb]**c**cc**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**
  adj[bb]**c**cc**v**bb**aa**adj[aa]**u**b**c},
{-adj[c]**adj[b]**adj[a], a**aa-adj[aa]**adj[a],
  a**b**c**cc**bb**aa**adj[aa]**u**b**c},
{-1, -adj[c]+adj[c]**adj[cc]**adj[c], adj[b]**adj[a]**a**
  b**c**cc**bb**adj[a]**adj[aa]**aa**adj[aa]**u**b**c},
{1, -adj[c]+adj[c]**adj[cc]**adj[c],
  adj[b]**adj[a]**a**aa**adj[aa]**u**b**c}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

Theorem 2.6

Let A, B, C with Moore-Penrose inverses A^\dagger, C^\dagger and let $M = ABC$. Furthermore, let \tilde{B} be such that $Q = C^\dagger \tilde{B} A^\dagger A$ exists and let $P = A^\dagger A B C C^\dagger$. Then, the following are equivalent:

- i) M is Moore-Penrose invertible and $M^\dagger = C^\dagger \tilde{B} A^\dagger$;
- iv) $Q \in P\{1\}$, $R(A^* A P) \supseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \supseteq R(Q)$;
- vi) $Q \in P\{2\}$, $R(A^* A P) \subseteq R(Q^*)$, and $R(C C^* P^*) \subseteq R(Q)$;

```

In[*]:= cond1 = {-m+m**cc**bb**aa**m, -cc**bb**aa+cc**bb**aa**m**cc**bb**aa,
  -m**cc**bb**aa+adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[m],
  -cc**bb**aa**m+adj[m]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]};
cond4 = {p**q**p-p, adj[q]-adj[a]**a**p**v2, c**adj[c]**adj[p]**u2-q};
cond6 = {q**p**q-q, adj[a]**a**p-adj[q]**v1, c**adj[c]**adj[p]-q**u1};

```

(i) \Leftrightarrow (iv)

(i) \Rightarrow (iv)

```

In[*]:= assumptions = {-a+a**aa**a, -aa+aa**a**aa,
  -a**aa+adj[aa]**adj[a], -aa**a+adj[a]**adj[aa],
  -c+c**cc**c, -cc+cc**c**cc, -c**cc+adj[cc]**adj[c],
  -cc**c+adj[c]**adj[cc], -a**b**c+a**b**c**cc**bb**aa**a**b**c,
  -cc**bb**aa+cc**bb**aa**a**b**c**cc**bb**aa,
  -a**b**c**cc**bb**aa+adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**
  adj[c]**adj[b]**adj[a], -cc**bb**aa**a**b**c+
  adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc],
  -adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a], -adj[aa]+adj[aa]**adj[a]**adj[aa],
  a**aa-adj[aa]**adj[a], aa**a-adj[a]**adj[aa],

```

```

-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
  a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc}, {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
    a ** b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
    -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
  {aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
  {1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** cc}, {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
  {adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc},
  {aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc},
  {-1, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
    b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc}},
{{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
  {adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
    c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
  {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1},
  {-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
    c ** cc - adj[cc] ** adj[c], 1}, {-1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
    a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
  {-adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
    a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
  {-adj[a], -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c]},
  {adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}},
{{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a}, {c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],

```



```

adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a),
{c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}}};

```

```
In[ ]:= CheckCertificates[certificate, cond4, assumptions]
```

```
Out[ ]:= {True, True, True}
```

(iv) => (i)

```

In[ ]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc,
-c ** cc + adj[cc] ** adj[c], -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u,
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
-adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[a] ** a, -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c]};
certificate = {{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1}, {a, -aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c}, {-a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
a ** b ** c ** cc ** c}, {-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c}, {-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{-1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},

```

```

{-a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** adj[a] **
  adj[aa] ** b ** c ** cc ** c}, {1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},
{a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c}, {a ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1}},
{{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb **
  adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c **
  cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c ** cc ** bb ** aa},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **
  bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] **
  adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa}, {-1, -cc ** c +
  adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
  -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},

```

```

{-adj[c]**adj[b]**adj[u]**adj[a]**adj[aa]**b**c,
 -cc**c+adj[c]**adj[cc],adj[c]**adj[cc]**cc**bb**aa},
{adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
 -adj[cc]+adj[cc]**adj[c]**adj[cc],cc**bb**aa},
{-cc,-c**cc**bb**aa**a+c**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**
 adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u,b**c**cc**bb**aa},
{adj[c]**adj[b]**adj[u]**adj[a]**adj[aa]**b,
 -c**cc**bb**aa**a+c**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**
 adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u,b**c**cc**bb**aa},
{-cc**c**cc**bb,aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**bb**aa},
{adj[c]**adj[b]**adj[u]**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc**bb,
 aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**bb**aa},{cc,-c+c**cc**c,
 adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{cc**c,-cc**c+adj[c]**adj[cc],
 adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{-adj[c]**adj[b],-adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]+
 adj[u]**aa**a**b**c**cc**c**adj[c],
 adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],c**cc-adj[cc]**adj[c],
 adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{-adj[c]**c**cc**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],c**cc-
 adj[cc]**adj[c],adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{adj[c]**adj[b]**adj[u],aa**a-adj[a]**adj[aa],b**c**cc**
 c**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{1,cc**c-adj[c]**adj[cc],adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**
 u**b**c**cc**bb**aa},{adj[c]**adj[b]**adj[u]**
 adj[a]**adj[aa]**b**c,cc**c-adj[c]**adj[cc],
 adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},{-adj[c],
 -adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]+adj[cc]**adj[c]**adj[b]**
 adj[a]**adj[aa]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**
 adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa],u**b**c**cc**bb**aa},
{adj[c]**adj[cc]**adj[c]**adj[b],-adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a],
 adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**
 adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},{-adj[c],c**cc-adj[cc]**adj[c],
 adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**
 adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{adj[c]**c**cc**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb],
 -adj[cc]+adj[cc]**adj[c]**adj[cc],
 adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{1,-adj[c]+adj[c]**adj[cc]**adj[c],adj[b]**adj[a]**adj[aa]**
 adj[bb]**c**cc**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},
{adj[c],c**cc-adj[cc]**adj[c],adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**
 c**cc**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**u**b**c**cc**bb**aa},{-1,
 cc**c-adj[c]**adj[cc],cc**bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc**bb**aa},
{-1,-cc+cc**c**cc,bb**adj[a]**adj[aa]**b**c**cc**bb**aa},
{cc**bb,-aa+aa**a**aa,1},
{-adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**cc**bb,

```

$-aa + aa ** a ** aa, 1\}, \{cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb,$
 $-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa\}, \{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +$
 $c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, aa\},$
 $\{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa\},$
 $\{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\}, \{-cc ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[u] **$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b,$
 $-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +$
 $adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],$
 $adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c -$
 $adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,$
 $adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c +$
 $adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa\},$
 $\{adj[c], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], u ** aa\},$
 $\{-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa\},$
 $\{adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **$

```

adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], -adj[cc] +
adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{-adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** aa},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa}},
{-adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1},
{a ** b ** adj[v], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[a]},
{-a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a]}, {a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]}, {a ** b ** adj[v],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
c ** cc ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1},
{-a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa},
{a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{-a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v, adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v,
adj[b] ** adj[a]}, {adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {-a ** b ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,

```

```

aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {adj[aa] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b ** adj[v] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[v], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-a, -aa ** a ** b ** c ** cc + aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb **
aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, v ** adj[b] ** adj[a]},
{a, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa **
a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **
cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]},
{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** v ** adj[b] ** adj[a]}, {-1,
-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a]}},
{-cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] **
b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], -aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},

```

```

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
 -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c **
 cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb **
 adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
 adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
 adj[c] ** adj[cc]}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
 -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1}, {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,
 aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[u] **
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
 b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {-1,
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,

```

```

cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] + adj[cc] ** adj[c] **
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c}}};

```

In[]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[]:= {True, True, True, True}

(i) \Leftrightarrow (vi)

(i) \Rightarrow (vi)

```

In[ ]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -c ** cc + adj[cc] ** adj[c],
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
  c ** cc - adj[cc] ** adj[c], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
    a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}};
certificate = {{{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},
  {c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c ** cc **
    bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1}, {c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1},

```


$\{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], 1\}, \{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],$
 $aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{-c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a\},$
 $\{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a\}\},$
 $\{1, -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc\},$
 $\{adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc\},$
 $\{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc\}, \{-adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** b ** c ** cc\},$
 $\{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c],$
 $adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc\},$
 $\{-adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc\},$
 $\{adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc\},$
 $\{-adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc\},$
 $\{adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc\},$
 $\{-adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc\}\},$
 $\{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{-c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],$
 $b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **$
 $adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]\}, \{c ** cc ** bb,$
 $aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$
 $c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa]\},$
 $\{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]\},$
 $\{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa +$
 $adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa]\},$
 $\{-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],$

```

c ** cc - adj [cc] ** adj [c] , adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] } ,
{-c , -adj [c] ** adj [b] ** adj [a] + adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] , adj [aa] } } } ;

```

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond6, assumptions]

```

```

Out[*]:= {True, True, True}

```

(vi) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a , -aa + aa ** a ** aa , -a ** aa + adj [aa] ** adj [a] ,
-a ** a + adj [a] ** adj [aa] , -c + c ** cc ** c , -cc + cc ** c ** cc ,
-c ** cc + adj [cc] ** adj [c] , -cc ** c + adj [c] ** adj [cc] , -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ,
adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** v -
adj [a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc , -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
c ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ,
-adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] , -adj [aa] + adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ,
a ** aa - adj [aa] ** adj [a] , aa ** a - adj [a] ** adj [aa] ,
-adj [c] + adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] , -adj [cc] + adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ,
c ** cc - adj [cc] ** adj [c] , cc ** c - adj [c] ** adj [cc] ,
-adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] **
adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] **
adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] , adj [v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** a ,
-adj [u] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] } ;
certificate = { { {a ** b ** c ** cc ** bb , aa ** a - adj [a] ** adj [aa] , b ** c} ,
{-a ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ,
-adj [cc] + adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] , 1} ,
{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] **
adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] , -adj [cc] + adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] , 1} ,
{-a ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ,
c ** cc - adj [cc] ** adj [c] , adj [cc] } ,
{a ** adj [u] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc ** adj [b] **
adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] , c ** cc - adj [cc] ** adj [c] , adj [cc] } ,
{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** adj [c] ** adj [b] **
adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] , c ** cc - adj [cc] ** adj [c] , adj [cc] } ,
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [u] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** c ** cc **
adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] , c ** cc - adj [cc] ** adj [c] , adj [cc] } ,
{a ** adj [u] , -adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] +
adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] **
adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] **
adj [cc] ** adj [c] , adj [cc] } , {-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [u] ,
-adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] + adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] **
adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] , adj [cc] } ,
{-a ** adj [u] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] **

```

[illegible]

```

b ** c ** cc ** c ** adj [c] ** adj [cc] },
{a ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, cc ** c - adj [c] ** adj [cc], adj [c] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c,
cc ** c - adj [c] ** adj [cc], adj [c] ** adj [cc] },
{a ** adj [a] ** adj [aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj [c] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b,
-c + c ** cc ** c, adj [c] ** adj [cc] },
{a ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc], adj [c] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c,
-cc ** c + adj [c] ** adj [cc], adj [c] ** adj [cc] }, {a ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{a ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc], 1},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc],
1}, {-a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj [c] **
adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa], adj [bb] ** adj [cc] },
{a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
c ** adj [c] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa],
adj [bb] ** adj [cc] }, {a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b **
c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa], u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj [a] ** adj [aa], u ** adj [bb] ** adj [cc] }, {a ** b ** c ** cc,
-c + c ** cc ** c, adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{a ** b ** c ** cc ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc],
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c + adj [c] ** adj [cc],
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa **
a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj [a] ** adj [aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj [a] ** adj [aa],
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, cc ** c -
adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c, -cc ** c +
adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c, cc ** c - adj [c] ** adj [cc], cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] **
b ** c ** cc ** bb ** adj [a] ** adj [aa] ** u ** adj [bb] ** adj [cc] },
{-a ** b ** c, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj [a] ** adj [aa] ** b ** c **

```

```

cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **
b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc]}, {a ** b ** c, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}, {-1, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]},
{-a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** c ** cc ** adj[cc]}, {1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{a, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], b ** c ** adj[c] ** adj[cc]}},
{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa},
{cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,
-aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa}, {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, aa},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa}, {-cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa}, {-cc ** c ** cc ** bb,
-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa}, {-cc ** c ** cc ** bb,
aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa}, {-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b,
-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa}, {-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb **
adj[a] ** adj[aa] ** aa}, {-1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** aa}},
{{-adj[aa] ** adj[bb], c ** cc - adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a]},
{adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb,
-aa + aa ** a ** aa, 1}, {adj[aa] ** adj[bb] ** c ** cc ** adj[b] **
adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa], aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v], -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] **
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},

```

$\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, \\ a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb, -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], \\ aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], \\ b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c, \\ cc ** c - \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc], cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b, \\ -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** b ** c, \\ -cc ** c + \text{adj}[c] ** \text{adj}[cc], cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb], \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - \\ \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a] ** a, \\ b ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], \\ b ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b], -\text{adj}[a] + \\ \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb], c ** cc - \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c], \\ \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb], \text{adj}[v] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - \\ \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a] ** a, aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** \text{adj}[b], \\ -\text{adj}[a] + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a], a ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb], c ** cc - \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c], \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** a ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b], \\ -\text{adj}[a] + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a], 1 \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a], a ** aa - \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a], 1 \},$
 $\{ \text{adj}[aa], \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** v - \\ \text{adj}[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b], \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** \\ \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c] ** v - \text{adj}[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb], \\ c ** cc - \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c], v ** bb ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** \\ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb], c ** cc - \text{adj}[cc] ** \text{adj}[c], v ** bb ** aa \},$
 $\{ a, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a] ** a, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** a, aa ** a - \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], \\ b ** c ** cc ** bb ** aa \}, \{ 1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a], -a + a ** aa ** a, \\ b ** c ** cc ** bb ** aa \}, \{ a, -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa \},$
 $\{ \text{adj}[aa] ** \text{adj}[a] ** a, -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa \},$
 $\{ -\text{adj}[aa] ** \text{adj}[bb] ** c ** cc ** \text{adj}[b] ** \text{adj}[a] ** a, \\ -aa ** a + \text{adj}[a] ** \text{adj}[aa], b ** c ** cc ** bb ** aa \},$


```

{cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[cc]}, {cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u + c ** adj[c] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** u +
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
  adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb,
  aa ** a - adj[a] ** adj[aa], u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {-cc, -c + c ** cc ** c,
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a **
  b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa], aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc **
  bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]}, {cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
  a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb, -aa ** a + adj[a] ** adj[aa],
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb, aa ** a - adj[a] ** adj[aa],
  b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b, -c + c ** cc ** c,
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b **
  c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b ** c ** cc **
  bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** b **
  c ** cc ** bb ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc]}, {-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}}};

```


In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

Theorem 2.7

Let A, B, C with inverses $A^{\{1,2,3\}}, C^{\{1,2,4\}}$ and let $M = ABC$. Let \tilde{B} be such that $Q = CC^{\{1,2,4\}}\tilde{B}A^{\{1,2,3\}}A$ exists and let $P = A^{\{1,2,3\}}ABC^{\{1,2,4\}}$. Furthermore, let ABC be right $*$ -cancellable and let $C^{\{1,2,4\}}\tilde{B}A^{\{1,2,3\}}$ be left $*$ -cancellable. Then, the following are equivalent:

- i) M is Moore-Penrose invertible and $M^\dagger = C^{\{1,2,4\}}\tilde{B}A^{\{1,2,3\}}$;
- ii) $Q \in P\{1,2\}$ and both of A^*APQ and $QPC C^*$ are Hermitian;
- iii) $Q \in P\{1,2\}$ and both of A^*APQ and $QPC C^*$ are EP;
- iv) $PQ = (PQ)^2$, $R(A^*AP) \supseteq R(Q^*)$, and $R(CC^*P^*) \subseteq R(Q)$;
- v) $PQ = (PQ)^2$, $R(A^*AP) \subseteq R(Q^*)$, and $R(CC^*P^*) \supseteq R(Q)$;

In[*]:= cond1 = {-m + m ** cc ** bb ** aa ** m, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** m ** cc ** bb ** aa,
-m ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[m],
-cc ** bb ** aa ** m + adj[m] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
cond2 = {p ** q ** p - p, q ** p ** q - q, adj[a] ** a ** p ** q - adj[adj[a] ** a ** p ** q],
q ** p ** c ** adj[c] - adj[q ** p ** c ** adj[c]]};
cond4 = {p ** q ** p ** q - p ** q, adj[q] - adj[a] ** a ** p ** v2,
c ** adj[c] ** adj[p] - q ** u1};
cond5 = {p ** q ** p ** q - p ** q, adj[a] ** a ** p - adj[q] ** v1,
q - c ** adj[c] ** adj[p] ** u2};

(i) <=> (ii)

(i) => (ii)

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
-cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa,
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc},

```

{aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
{aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
{aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
{aa ** a ** b ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c -
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
{aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc},
{aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc}},
{{c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c -
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
{c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}},
{{adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a},
{adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, 1},
{adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
{adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a}, {adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a}},
{{c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}, {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}, {c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c -
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c]}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond2, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

(ii) => (i)

In[8]:= assumptions =

```
{-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -c + c ** cc ** c,
 -cc + cc ** c ** cc, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -aa ** a ** b ** c ** cc +
 aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,
 -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c **
 cc ** bb ** aa ** a, adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
 -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc],
 cc ** c - adj[c] ** adj[cc], -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
 adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
 -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
 -adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a +
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 -c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] +
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]};
certificate = {{ {a ** b, -c + c ** cc ** c, 1}, {-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b,
 -c + c ** cc ** c, 1}, {a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
 {-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
 {a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], adj[cc]}},
 {-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]}},
 {a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]}},
 {a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]}},
 {-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[cc]}},
 {a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]}},
 {-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]}},
 {-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
 -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]}},
 {a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
 {-a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
```

```

{a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1},
{-a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], 1}, {a, -aa ** a ** b ** c ** cc +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c}, {1,
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c}, {-a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa,
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c}, {-a ** aa ** a ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-a ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{-1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c},
{a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** c},
{a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** c},
{-a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[cc] ** cc ** c}, {a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** c},
{-a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** c},
{-a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** c},
{a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** c},
{-a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** c},
{a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc] ** cc ** c},
{a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** c},
{-a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** c}},
{-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{cc, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[cc] ** cc ** bb ** aa}, {-cc ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{cc ** c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c,

```

adj[c] ** adj[c] ** cc ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
- cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
- adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{-1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{cc ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc **
c ** cc ** bb ** aa ** a, aa}, {-cc ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa}, {-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-cc, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[cc] ** cc ** bb ** aa}, {cc ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-cc ** c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa}, {cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa},
{-cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** cc ** bb ** aa}, {1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa}, {1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa}},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1},

```

{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
 a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1},
{-adj[aa], adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa},
{adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
 adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{adj[aa] ** adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** aa ** a ** aa}, {-adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
 -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{adj[aa] ** adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{adj[aa] ** adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 cc ** bb ** aa ** a ** aa}, {-1, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
 adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** aa},
{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa},
{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1}},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, 1},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{-cc, c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[cc]},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
{-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
 adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] **
 adj[cc]}, {-cc ** c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
 adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]},
{cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
 adj[c] ** adj[cc]}, {-cc ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
 adj[bb] ** adj[cc]}, {1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
 adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]= {True, True, True, True}

(ii) \Leftrightarrow (iii)

(ii) \Rightarrow (iii)

$\text{In}[*]:=$ (* This trivially holds *)

(iii) \Rightarrow (ii)

$\text{In}[*]:=$ assumptions =

```
{-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -c + c ** cc ** c,
 -cc + cc ** c ** cc, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -aa ** a ** b ** c ** cc +
  aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc,
 -c ** cc ** bb ** aa ** a + c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc **
  c ** cc ** bb ** aa ** a, -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a +
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** u,
 adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a ** v,
 c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] -
  c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** w,
 -c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** s,
 -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
 a ** aa - adj[aa] ** adj[a], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
 -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
 -adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] +
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
 -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
 -adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a +
  adj[u] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
 adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a -
  adj[v] ** adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
 c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[w] ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
 -c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] +
  adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]};
```

```

certificate = {{ {aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa,
  - a + a ** aa ** a, b ** c ** cc},
  {aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {1, -aa ** a ** b ** c ** cc +
    aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, 1},
  {-aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc},
  {-aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {-aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc},
  {-aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc}},
  {c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
  {c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {1, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
    c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, 1},
  {-c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
  {-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}},
  {adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a},
  {adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, 1}, {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
    adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, 1},
  {adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
  {adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
    adj[b] ** adj[a] ** a}, {adj[v] ** adj[a] ** a ** b, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
    c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a, 1},
  {-adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[v] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
    -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
    b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c,
    cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {-adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
    cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},

```



```

{-1, -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[a] **
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** a ** v}, {adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v},
{adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v}},
{c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}, {-c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c]},
{-c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}, {-adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[a] ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], 1},
{c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}, {adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
  adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{1, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] +
  adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c],
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]}, {-adj[s], -c + c ** cc ** c,
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},

```

```

{-adj[s] ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
  adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c,
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-1, -c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] +
  adj[s] ** c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c], 1},
{-c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c]},
{1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{adj[s], -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{adj[s] ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
  adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c]},
{1, -c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** s, 1},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
  c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** s, 1},
{-c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** s},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** adj[c] ** s},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** s},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** s},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** s},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b,
  -c + c ** cc ** c, adj[c] ** s},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** s},
{c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** s}, {1, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
  c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,

```

```

b ** c ** adj[c] ** s}, {-c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** s},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** s}, {-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b,
-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** s},
{-c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** adj[c] ** s}}};

```

```
In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond2, assumptions]
```

```
Out[*]:= {True, True, True, True}
```

(i) \Leftrightarrow (iv)

(i) \Rightarrow (iv)

```

In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
-cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa,
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{-aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
{aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
{-aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b,
-c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
{aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c **
cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c -
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
{aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** bb ** aa ** a},
{aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **

```

```

adj[aa]**adj[bb]**adj[cc], cc**bb**aa**a}}, {{-adj[a], -a+a**aa**a,
b**c**cc**bb**aa**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]},
{-adj[a], -adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]+adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**
adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc], adj[c]},
{-adj[a], a**b**c**cc**bb**aa-adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**
adj[c]**adj[b]**adj[a], adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]}},
{{1, -c+c**cc**c, adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]},
{c, -cc**c+adj[c]**adj[cc], adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]},
{-c, cc**bb**aa**a**b**c-adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**
adj[bb]**adj[cc], adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]},
{c**adj[c]**adj[b]**adj[a], a**b**c**cc**bb**aa-
adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a], adj[aa]},
{-c**adj[c]**adj[b]**adj[a], a**b**c**cc**bb**aa-
adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a], adj[aa]},
{-c, -adj[c]**adj[b]**adj[a]+adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**
adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a], adj[aa]}}};

```

```
In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond4, assumptions]
```

```
Out[*]:= {True, True, True}
```

(iv) => (i)

```

In[*]:= assumptions = {-a+a**aa**a, -aa+aa**a**aa, -a**aa+adj[aa]**adj[a],
-c+c**cc**c, -cc+cc**c**cc, -cc**c+adj[c]**adj[cc],
-aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a+aa**a**b**c**cc**
c**cc**bb**aa**a**aa**a**b**c**cc**c**cc**bb**aa**a,
adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]-
adj[a]**a**aa**a**b**c**cc**w, -c**cc**bb**aa**a**v+
c**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa],
a**b**c-a**b**c**cc**bb**aa**a**b**c,
-adj[a]+adj[a]**adj[aa]**adj[a], -adj[aa]+adj[aa]**adj[a]**adj[aa],
a**aa-adj[aa]**adj[a], -adj[c]+adj[c]**adj[cc]**adj[c],
-adj[cc]+adj[cc]**adj[c]**adj[cc], cc**c-adj[c]**adj[cc],
-adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**
adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]+
adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[cc]**adj[c]**
adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**
adj[c]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa], c**cc**bb**aa**a-
adj[w]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[a]**a,
-adj[v]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]+
aa**a**b**c**cc**c**adj[c], adj[c]**adj[b]**adj[a]-adj[c]**adj[b]**
adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a]};
certificate = {{{-1, a**b**c-a**b**c**cc**bb**aa**a**b**c, 1}},
{{-cc**adj[w]**adj[cc], adj[c]**adj[b]**adj[a]-adj[c]**adj[b]**
adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**adj[cc]**adj[c]**adj[b]**adj[a], 1},
{cc**bb**aa**a**b**adj[w]**adj[cc], adj[c]**adj[b]**adj[a]-
adj[c]**adj[b]**adj[a]**adj[aa]**adj[bb]**

```



```

{-1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{1, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa}, {-1, -cc + cc ** c ** cc,
  bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{-1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** adj[aa] **
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa}, {1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa},
{-cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w, adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa],
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w, adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]}, {cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a],
  -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{cc ** bb ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]}, {-cc ** bb ** aa,
  a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** w ** adj[b] ** adj[a]}},
{-a ** b ** adj[w] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] ** adj[b] **
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], 1},
{a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] **
  adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
  adj[c] ** adj[b] ** adj[a]}, {a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -
  adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,
  aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
  a ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
  aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa,
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1},
{-a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1}, {-a ** b, c ** cc ** bb ** aa ** a -

```

```

adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa},
{a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{-a ** b ** adj[w] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, aa},
{a ** b ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w, adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w, adj[b] ** adj[a]},
{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{-a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a]},
{-1, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]},
{a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a]}, {1,
a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** w ** adj[b] ** adj[a]}},
{-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1},
{-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w, adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w, adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a],
-a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** w ** adj[cc]}, {cc ** bb ** adj[v] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** w ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** w ** adj[cc]},
{cc ** bb ** adj[v] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc]}, {-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a],
a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** w ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** adj[v] ** adj[a] ** a ** b ** adj[w] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **

```



```

a ** b ** c ** cc ** w ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** adj [v] ** adj [a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
a ** aa - adj [aa] ** adj [a] ,
a ** b ** c ** cc ** w ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{- cc ** bb ** adj [v] ** adj [a] , - adj [aa] + adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] , adj [bb] **
adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** adj [v] ** adj [a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
- adj [aa] + adj [aa] ** adj [a] ** adj [aa] , adj [bb] ** adj [cc] **
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** adj [v] ** adj [a] , a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ,
cc ** w ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** bb , - adj [v] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] , adj [b] ** adj [a] **
adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] }, {-1, cc ** c - adj [c] ** adj [cc] ,
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{- cc ** bb ** aa ** a ** b ** c , cc ** c - adj [c] ** adj [cc] ,
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{- cc , - c + c ** cc ** c , adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] **
adj [bb] ** adj [cc] }, {- cc ** c , - cc ** c + adj [c] ** adj [cc] ,
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] },
{- cc ** bb , - adj [v] ** adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] +
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj [c] , adj [cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c , cc ** c - adj [c] ** adj [cc] , adj [c] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b , - c + c ** cc ** c , adj [c] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c , - cc ** c + adj [c] ** adj [cc] , adj [c] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b , - c + c ** cc ** c , 1} ,
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c , - cc ** c + adj [c] ** adj [cc] , 1} ,
{cc , - c ** cc ** bb ** aa ** a ** v + c ** adj [c] ** adj [cc] **
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] , adj [bb] ** adj [cc] },
{- cc ** bb ** aa ** a ** b , - c ** cc ** bb ** aa ** a ** v + c ** adj [c] **
adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** adj [aa] , adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** adj [w] ** adj [cc] , adj [c] ** adj [b] ** adj [a] - adj [c] ** adj [b] **
adj [a] ** adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ,
a ** v ** adj [bb] ** adj [cc] }, {- cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj [w] ** adj [cc] ,
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] - adj [c] ** adj [b] ** adj [a] **
adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ,
a ** v ** adj [bb] ** adj [cc] }, {- cc ** adj [w] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ,
- adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] , adj [aa] ** adj [bb] **
adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** a ** v ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj [w] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ,
- adj [a] + adj [a] ** adj [aa] ** adj [a] , adj [aa] ** adj [bb] **
adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** a ** v ** adj [bb] ** adj [cc] },
{- cc ** adj [w] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ,
a ** aa - adj [aa] ** adj [a] , adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] **
adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ** a ** v ** adj [bb] ** adj [cc] },
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** adj [w] ** adj [cc] ** adj [c] ** adj [b] ** adj [a] ,
a ** aa - adj [aa] ** adj [a] , adj [aa] ** adj [bb] ** adj [cc] **

```



```

adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w,
adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** w,
adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]}, {cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** adj[a], -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** w ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-cc ** bb ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{cc ** bb ** aa, a ** b ** c - a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
cc ** w ** adj[b] ** adj[a] ** a ** v ** adj[bb] ** adj[cc]},
{-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

$$(i) \Leftrightarrow (v)$$

$$(i) \Rightarrow (v)$$

```

In[8]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa,
  -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc,
  -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c,
  -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -a ** b ** c ** cc ** bb ** aa + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[c] ** adj[b] ** adj[a] + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
  -adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] + adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], cc ** bb ** aa **
    a ** b ** c - adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{{-aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
    cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa,
    -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
  {aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a},
  {-aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
    cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
    cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b,
    -c + c ** cc ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a},
  {aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c **
    cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a}, {aa ** a ** b ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c -
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a},
  {aa, -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc ** bb ** aa ** a},
  {aa ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}},
  {{adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc}, {adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa -
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** b ** c ** cc},
  {-adj[a] ** a ** b ** c, cc ** bb ** aa ** a ** b ** c -
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc},
  {-adj[a], -a ** b ** c + a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c, cc},
  {-adj[a] ** a ** b ** c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c +
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc}},
  {{-1, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
    adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a}, {-c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a},
  {-c, -cc ** bb ** aa + cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a},
  {-c, -cc ** bb ** aa ** a ** b ** c + adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a}}};

```

```
In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond5, assumptions]
```

```
Out[*]:= {True, True, True}
```

(v) => (i)

```
In[*]:= assumptions = {-a + a ** aa ** a, -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
  -c + c ** cc ** c, -cc + cc ** c ** cc, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  -aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c ** cc **
    c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
    adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
    c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u,
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
  adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[a] ** a, -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
    adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c],
  cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa,
  -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
  a ** aa - adj[aa] ** adj[a], -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
  -adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
  -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
    adj[a] ** adj[aa] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
    adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
  adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
    adj[aa] ** adj[a] ** a, -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
    adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], -a + a ** aa ** a,
  -aa + aa ** a ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], -c + c ** cc ** c,
  -cc + cc ** c ** cc, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
  -aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a + aa ** a ** b ** c ** cc **
    c ** cc ** bb ** aa ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** cc ** bb ** aa ** a,
  adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
    adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
    c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u,
  adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
    adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc]};
certificate = {{ {adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
  adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
  {-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] **
    adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
  {adj[aa], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c},
```



```

adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c}},
{-1, cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, 1}},
{{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[s] ** c,
cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, 1},
{adj[aa] ** adj[bb], adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa},
{1, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[aa], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa},
{adj[aa] ** adj[bb] ** adj[s] ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, 1},
{-adj[aa] ** adj[bb], adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], 1},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], 1},
{adj[aa], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa},
{-adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa},
{-1, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] - adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** s ** bb ** aa},
{-1, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** s ** bb ** aa}, {-1, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa}, {-1, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa},
{1, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa}},
{{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], 1},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa], adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s - adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s - adj[a] ** a **
aa ** a ** b ** c ** cc, c}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c},

```

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **
adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** s ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa,
-adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa], adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** a ** b, -c + c ** cc ** c, 1},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[s] ** c,
cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, a ** b ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **
adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] **
aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],
-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[a],
a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},

{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[s] ** c ** cc ** bb,
-aa + aa ** a ** aa, a ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb],
adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** a ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** a ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** a ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** a ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **
adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
a ** b ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c},

{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **

adj[c] ** adj[b], adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** s ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa, -a + a ** aa ** a,
b ** c ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c,
cc ** bb ** aa ** a ** b ** c}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b ** c,
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] + adj[u] **
aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b ** c, cc ** c - adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c,
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[cc] ** cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], cc ** bb ** aa ** a ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b], -adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] +
adj[u] ** aa ** a ** b ** c ** cc ** c ** adj[c], adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b ** c,
cc ** c - adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[cc]},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[u] ** aa ** a ** b ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[cc]}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb],
-adj[cc] + adj[cc] ** adj[c] ** adj[cc], 1}, {cc, -c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc,
-c ** cc ** bb ** aa ** a +
c ** adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u, b ** c},
{-cc, -c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc,
-c + c ** cc ** c, adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{1, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] **
adj[aa] ** u ** b ** c}, {-cc ** c, -cc ** c + adj[c] ** adj[cc],
adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],
-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** cc ** c,

$-cc ** c + adj[c] ** adj[cc], adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c], adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{1, -cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc],$
 $-cc + cc ** c ** cc, bb ** aa ** a ** b ** c), \{-adj[c] ** adj[s] ** c,$
 $cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[s] ** c,$
 $cc ** bb ** aa - cc ** bb ** aa ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa, adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c], adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a -$
 $adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c), \{adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[s] ** c ** cc ** bb, -aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[s] ** c ** cc ** bb,$
 $-aa + aa ** a ** aa, adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c], adj[s] ** c ** cc ** bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] **$
 $adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a, aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb], adj[s] ** c ** cc **$
 $bb ** aa ** a - adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[a] ** a,$
 $aa ** adj[aa] ** u ** b ** c), \{adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $-a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] **$
 $adj[b] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b], -adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a],$
 $a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],$
 $-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a],$
 $a ** aa - adj[aa] ** adj[a], a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c),$
 $\{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] **$
 $adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],$

```

a ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}, {adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
-adj[a] + adj[a] ** adj[aa] ** adj[a], adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** u ** b ** c}, {-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] **
adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** u ** b ** c}, {adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b],
adj[a] ** adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s -
adj[a] ** a ** aa ** a ** b ** c ** cc, bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] -
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** adj[b] ** adj[a] ** adj[aa] **
adj[bb] ** adj[cc], adj[c] ** s ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a ** aa + adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -adj[aa] + adj[aa] ** adj[a] ** adj[aa],
adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{-adj[c] ** adj[b] ** adj[a], a ** aa - adj[aa] ** adj[a],
adj[aa] ** adj[bb] ** adj[cc] ** adj[c] ** s ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c},
{adj[c] ** adj[b] ** adj[a], -a + a ** aa ** a, b ** c ** cc ** bb ** aa **
adj[aa] ** u ** b ** c}, {-1, -adj[c] + adj[c] ** adj[cc] ** adj[c],
adj[b] ** adj[a] ** a ** b ** c ** cc ** bb ** aa ** adj[aa] ** u ** b ** c}}};

```

In[*]:= CheckCertificates[certificate, cond1, assumptions]

Out[*]:= {True, True, True, True}

Theorem 2.9

To prove Theorem 2.9, the computations of Theorems 2.1, 2.3, 2.4. 2.6 can be adopted.